LMG: lineare Matrizengleichung

LMG für X: $A \cdot X = B$

Koeffizientenmatrix (A), Störmatrix (B)

homogen: $B = 0$ inhomogen: $B \neq 0$

linearer Raum / Vektorraum

Körper K, Elemente von K: skalare Größen

Menge V von Vektoren: vektorielle Größen, $V \neq \emptyset$

Addition $+ : V \times V \to V$

skalare Mult. $\cdot : K \times V \to V$

V linearer Raum / Vektorraum über K $\Leftrightarrow$

(1) $(V, +)$ abelsche Gruppe

(2) $\forall u, v \in V \ \forall \alpha, \beta \in K$:

$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$

$(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$

$\alpha \cdot (u + v) = \alpha u + \alpha v$

$1_K \cdot v = v$

nicht-triviales Bsp:

Vektorraum $K[x] := \{ p(x) \mid p \text{ Polynom über } K \}$

lineare Unterräume

Sei V ein K-VR. $U \subseteq V$ ist lin. UR von V $\Leftrightarrow$ U ist K-VR

Satz: $U \subseteq V$ ist lin. UR von V $\Leftrightarrow$

(UR1) $0_V \in U$

(UR2) $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$

(UR3) $a \in U, \alpha \in K \Rightarrow \alpha \cdot a \in U$

M heißt **Erzeugendensystem** eines linearen UR, falls $[M] = U$

M linear abhängig $\Leftrightarrow$ ein Vektor aus M ist LK der anderen

M Basis eines lin UR $\Leftrightarrow$ M ist lin. unabhängiges ES des UR

Austauschsatz von Steinitz

V ist K-VR, $A, B \subseteq V$ lin. unabh. Mengen

Es gilt: $|A| > |B| \Rightarrow \exists a \in A \setminus B : B \cup \{a\}$ lin. unabh.

Hauptsatz der Vektorraumtheorie

(1) Jeder K-VR V besitzt eine Basis

(2) Sind $B_1, B_2 \subseteq V$ Basis von V, so gilt $|B_1| = |B_2|$

Besitzt V endliche Basis B, so definiert man: $\dim(V) = |B|$

Hat V kein endliches ES, so gilt $\dim(V) = \infty$

Dimension

$U \subseteq V$ lin. UR von V mit $\dim(U) = d$

(D1) Jede Menge aus d lin. unabh Vektoren aus U ist Basis

(D2) Je d+1 Vektoren aus U sind lin. abhängig

$U = [\emptyset] = \{0_V\} \Leftrightarrow \dim(U) = 0 \Leftrightarrow$ Basis B von U mit $|B| = 0$

Kriterium lineare Unabhängigkeit

$M = \{a_1, \dots, a_n\}$

M lin. unabh. $\Leftrightarrow \alpha_1 \cdot a_1 + \dots + \alpha_n \cdot a_n = 0_V$ hat nur triviale Lsg

$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

$\Rightarrow$ ist M lin. unabh., dann hat jeder Vektor $x \in [M]$ eine eindeutige Darstellung als LK von M

Basisbestimmung und Rang

Matrix $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in K^{(m,n)}$

lin. UR $W = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$ des K^m Spaltenraum der Matrix

$\dim(W) = rg(A)$

S Stufenmatrix mit r Stufen $\Rightarrow$ Spalten $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r$ lin. unabh

$\Rightarrow \dim(W) = rg(A) = r$

Eigenschaften des Ranges

(R1) $rg(A)$ = max. AZ. lin. unabh. Spalten von A

(R2) $rg(A) = rg(A^T)$ = — " — Zeilen — " —

= Dimension des Zeilenraumes (Stufenzahl von S)

(R3) Bei Gaußop. bleibt der Rang gleich

(R4) Dimensionsformel:

lin. UR $U = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \}$

$\Rightarrow \dim(U) = n - rg(A)$

(R5) Rangkriterium:

$A\vec{x} = \vec{b}$ hat Lsg $\vec{x} \in K^n \Leftrightarrow rg(A) = rg(A, \vec{b})$

$\Leftrightarrow \vec{b}$ ist LK der Spalten von A

Abtragen einer Vektormenge an einem Punkt

Vektormenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$

Punkt $\vec{r_0} \in \mathbb{R}^n$

Punktmenge $\vec{r_0} + U := \{ \vec{r_0} + \vec{x} \mid \vec{x} \in U \} \subseteq \mathbb{R}^n$

affiner UR des $\mathbb{R}^n$

Punktmenge $T = \vec{r_0} + U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt affiner UR

$\Leftrightarrow \vec{r_0} \in \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lin. UR

$\dim(T) = \dim(U)$

spezieller Punkt

Richtungsvektoren von T

Ist $\vec{r} = \vec{0} \in T$, so gilt $T = \vec{0} + U = U$

$\Rightarrow$ jeder lin. UR ist auch ein affiner UR

Ist $\dim(T) = 0$, so ist $\dim(U) = 0 \Rightarrow U = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow T = \vec{r_0} + \{\vec{0}\} = \{\vec{r_0}\}$ ist Punkt

Parameterdarstellung von $T = \vec{r_0} + U$

$d = \dim(T) = \dim(U) \geq 1$ mit $U = [\vec{a_1}, \dots, \vec{a_d}]$

Parameterdarstellung: $\vec{r} \in T \Leftrightarrow \vec{r} = t_1 \cdot \vec{a_1} + \dots + t_d \cdot \vec{a_d}$ $(t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R})$

$d = 0$: Punkt

$d = 1$: Gerade

$d = 2$: Ebene

$d = n-1$: Hyperebene

$d = n$: ganze Raum

affine UR durch vorgegebene Punkte

geg: $\vec{r}_0, \dots, \vec{r}_d \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \quad T = \vec{r}_0 + [\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \dots, \vec{r}_d - \vec{r}_0]$

spezieller Punkt

lin UR U ($\in S$) $\leadsto$ Menge der Richtungsvektoren

Lagebeziehungen affiner UR

$T_1 = \vec{r}_1 + [\vec{a}]$
$T_2 = \vec{r}_2 + [\vec{b}]$

Richtungsvektoren lin. abhängig bzw. Teilmenge?

Ja ↓ | Nein ↓

identisch: $\vec{r}_1 \in T_2$?
parallel: sonst

Schnitt: $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = t\vec{a} - s\vec{b}$
windschief: sonst

Skalarprodukt

$a \circ b$

V ist $\mathbb{R}$-VR; Abb. $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \to \mathbb{R}$; $a, b \in V \mapsto \langle a, b \rangle$

(S1) $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

(S2) $\langle a, b+c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$

(S3) $\langle a, t \cdot b \rangle = t \cdot \langle a, b \rangle$

(S4) $\langle a, a \rangle \geq 0$, $\langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$\Rightarrow$ positiv definite symmetrische Bilinearform

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

Norm (Betrag, Länge)

$\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$ euklidische Norm

(N1) $\|\vec{a}\| \geq 0$, $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

(N2) $\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$

(N3) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

Abb. $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit (N1)–(N3) ist Norm

$\|\vec{a}\|_1 = |\vec{a}_1| + \dots + |\vec{a}_n|$ Betragssummennorm

$\|\vec{a}\|_\infty = \max\{|a_i|\}$ Maximumnorm

(N4) Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$-\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

Einheitsvektoren

$\rightarrow$ Vektoren auf Länge 1 normiert

$$\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$$

Winkel zwischen $\vec{a}$, $\vec{b}$

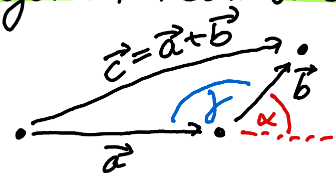
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right)$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \iff \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = 0$$
$$\iff \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

Orthogonalität

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

Pythagoras / Kosinussatz



$$\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \gamma$$
$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha) \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\gamma) \end{aligned}$$

Metrik

(D1) $d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \geq 0$, $d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0 \iff \vec{r}_1 = \vec{r}_2$

(D2) $d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = d(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$

(D3) $d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \leq d(\vec{r}_1, \vec{r}) + d(\vec{r}, \vec{r}_2)$

Abstände

Punkt – Punkt: $d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \| \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \|$

Punkt – affiner UR: $d(\vec{r}_1, T) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_F)$

$\vec{r}_F$ bestimmen:

1) $T = \vec{r}_0 + U$
2) $U^\perp = [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$ bestimmen
   $\langle \vec{a}_1, \vec{b}_1 \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{b}_2 \rangle = \langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle = \langle \vec{a}_2, \vec{b}_2 \rangle = 0$
3) Schnittpunkt von T und $T' = \vec{r}_1 + U^\perp$ bestimmen $\to \vec{r}_F$

$U^\perp \triangleq$ orthogonale Komplement von U
$:= \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A^T \vec{x} = \vec{0} \}$

$\dim(U^\perp) + \dim(U) = n$

Hessesche Form einer Hyperebene

geg: $T = \vec{r}_0 + U$ Hyperebene $\to \dim(T) = n-1$
$\to \dim(U^\perp) = 1 \to U^\perp = [\vec{n}]$ Normalenvektor

$\Rightarrow T = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = p \}$ $p = \langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle$

$\dim(\emptyset) = 0$

orthogonale Projektion

$U \in \mathbb{R}^n$ lin. UR ; $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ Vektor

$\Rightarrow$ Zerlegung von $\vec{x}$ in Summe der Form: $\vec{x} = \underset{\in U}{\vec{x}_1} + \underset{\in U^\perp}{\vec{x}_2}$

$\Rightarrow \vec{x}_1 = \text{proj}(\vec{x} : U)$ orth. Proj.

Orthonormalsystem (ONS)

M ist ONS $\Leftrightarrow$ $b_i \perp b_j \; \forall i \neq j$ und $\|b_i\| = 1 \; \forall 1 \leq i \leq m$

Orthonormalbasis (ONB)

M ist ONB $\Leftrightarrow$ M ist ONS und Basis von U

Eigenschaften von ONS

$M = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ ist ONS. Es gilt:

a) Ist $\vec{x} = a_1\vec{b}_1 + \dots + a_m\vec{b}_m$ LK, so ist $a_i = \langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle$

b) M ist lin. unabh.

Berechnung der orth. Proj.

Ist $M = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ ONS des lin UR $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \vec{x}_1 = \text{proj}(\vec{x} : U) = \langle \vec{x}, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 + \dots + \langle \vec{x}, \vec{b}_m \rangle \vec{b}_m$

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

geg: Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$

ges: ONB $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$

Lsg: allgemein für $1 \leq r \leq m+1$:

$$\vec{c}_{r+1} = \vec{a}_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} (\langle a_{i+1}, b_i \rangle \cdot b_i)$$

$$= \vec{a}_{r+1} - \text{proj}(\vec{a}_{r+1} : [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r])$$

$$\Rightarrow \vec{b}_{r+1} = \frac{1}{\|\vec{c}_{r+1}\|} \vec{c}_{r+1}$$

Bsp: Basis $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$

$\rightarrow \vec{b}_1 = \frac{1}{\|\vec{a}_1\|} \vec{a}_1$

$$\vec{c}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle \cdot \vec{b}_1 \quad \Rightarrow \vec{b}_2 = \frac{1}{\|\vec{c}_2\|} \vec{c}_2$$

Näherungslösung eines LGS

$\vec{x}$ ist beste Näherungslösung von $A\vec{x} = \vec{b}$

$\Leftrightarrow \|A\vec{x} - \vec{b}\|$ minimal $\Leftrightarrow A^T \cdot A\vec{x} = A^T\vec{b}$

$A^T \cdot A$ muss immer symmetrisch sein !

Ausgleichspolynom

$k=1: \quad p(x) = 1a_0 + a_1 x$

$(x_i, y_i) = (0,1), (2,3), (4,7), (6,9)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$

beste Näherungslösung für $\vec{x}$: $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$

$\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 56 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 88 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p(x) = \frac{4}{5} + \frac{7}{5} x$

Determinante

Fkt $\det: K^{(n,n)} \to K$, die der Vektormenge / Matrix das verallgemeinerte Volumen des aufgespannten Objektes zuweist.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

$n=2$: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$

$n=3$: $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$$

(D1) Linearität in jeder Spalte

(D2) Enthält die Matrix zwei gleiche Spalten, so ist $\det(A) = 0$

(D3) Normierung $\det(E) = 1$

(D4) $\det(A) = \det(A^T)$

(D5) Enthält die Matrix eine Nullzeile / -spalte, so ist $\det(A) = 0$

(D6) Gaußoperationen:

i) $\det\begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha \cdot \underline{a} \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det\begin{pmatrix} \vdots \\ \underline{a} \\ \vdots \end{pmatrix}$

ii) Vielfaches einer Zeile zu anderer addieren $\Rightarrow$ keine Änderung

iii) Zeilentausch $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel

(D7) Dreiecksmatrizen

obere Dreiecksmatrix: $d_{ij} = 0$ für $j < i$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

untere Dreiecksmatrix: $d_{ij} = 0$ für $j > i$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

ist D Dreiecksmatrix, so gilt:

$\det(D) = d_{11} \cdot d_{22} \cdot \ldots \cdot d_{nn}$

(D8) Invertierbarkeit

A invertierbar $\Leftrightarrow$ Spalten / Zeilen linear unabhängig

$\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = n \quad \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

(D9) Produktregel

a) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

b) $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det(A)$

c) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ falls A invertierbar

(D10) LGS eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ $\quad (A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$

Cramersche Regel $\Rightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ lösen, wenn $\det(A) \neq 0$

$$x_i = \frac{\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det(A)}$$

Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & & 4 \\ 2 & & 5 \end{matrix}$$

Rechenregeln

(V1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(V2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$\vec{a} \times t \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \times \vec{b})$

$t\vec{a} \times \vec{b} = t(\vec{a} \times \vec{b})$

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

(V3) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

(V4) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0$ also $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$

$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$ $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

(V5) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))$

(V6) $\sin(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = \dfrac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$

(V7) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$

(V8) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = t \cdot \vec{b}$ oder $\vec{b} = t \cdot \vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$

Lineare Abbildungen

V, W VR über K. $L: V \to W$ Abbildung

$\forall \alpha, \beta \in K \ \forall x, y \in V: L(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y)$

äquivalent zu:

1) $\forall x, y \in V: \ L(x+y) = L(x) + L(y)$
2) $\forall \alpha \in K \ \forall x \in V: \ L(\alpha x) = \alpha \cdot L(x)$

$L(x) = b$ ist lineare Gleichung in der Unbekannten x, falls L eine lineare Abbildung ist.

$\to$ homogen: $b = 0_W$

inhomogen: $b \neq 0_W$, $b \in W = K^m$

(Vektorraum-) Homomorphismus

Summe und Vielfache von lin. Abb. sind lin. Abb.

Hauptsatz über Lineare Gleichungen

V, W K-VR. $L \in \mathcal{L}(V, W)$ lin. Abb.

$U = \{ x \in V \mid L(x) = 0_W \}$ allgemeine Lsg der homogen Gl

$T = \{ x \in V \mid L(x) = b \}$

$\Rightarrow$ 1) U lin. UR von V

2) $T = \emptyset$ oder falls $x_s \in T$, dann ist T ein affiner UR von V mit $T = x_s + U$

Linear $\iff L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$

Ist L eine lin. Abb., so gibt es ein $M \in K^{(m,n)}$ Abbildungsmatrix mit $L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in K^n = V$

Bestimmung von M bei Basiswechsel

geg: Basis von K^n $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in K^{(n,n)}$ invertierbar

Bilder von a_i: $L(a_i) = b_i \Rightarrow (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$

ges: M

Lsg: $M \cdot a_i = b_i$

$$\Rightarrow (M\vec{a}_1, \dots, M\vec{a}_n) = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$$
$$\Rightarrow M \cdot (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$$
$$\Rightarrow M = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) \cdot (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)^{-1}$$
$$= (L(\vec{a}_1), \dots, L(\vec{a}_n)) \cdot (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)^{-1}$$

Komposition lin. Abb. / Matrizenmult.

$L_1 : K^n \to K^m$ linear mit $L_1(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$ $\quad M \in K^{(m,n)}$

$L_2 : K^m \to K^p$ linear mit $L_2(\vec{x}) = N \cdot \vec{x}$ $\quad N \in K^{(p,m)}$

$L_1 \circ L_2 : K^n \to K^p$ linear mit $(L_1 \circ L_2)(\vec{x}) = L_2(L_1(\vec{x})) = N \cdot M \cdot \vec{x}$

Umkehrabbildung / inverse Matrix

nur falls $A \in K^{(n,n)}$ invertierbar

$$\vec{x} \in K^n \underset{A^{-1}}{\overset{A}{\rightleftarrows}} \vec{y} = A\vec{x} \in K^n$$

$\vec{y} = A\vec{x} \iff \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y}$

orthogonale Matrizen

$\iff A^T \cdot A = E$

$\iff$ Spaltenvektoren von A sind ONS, also ONB von $\mathbb{R}^n$

(01) $A^T = A^{-1}$

(02) A^T und A^{-1} sind ebenfalls orthogonal

(03) $\langle A\vec{x}_1, A\vec{x}_2 \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle \quad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$

(04) $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

(05) $\sphericalangle(A\vec{x}_1, A\vec{x}_2) = \sphericalangle(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$

(06) $\det(A) = \pm 1$

(07) $A \cdot B \in \mathbb{R}^n$ ist orthogonal

Eine lin. Abb. L des euklidischen VR V in den eukl. VR W heißt orthogonal $\iff \forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \langle L(x), L(y) \rangle$

$\iff$ Abbildungsmatrix M orthogonal

Klassifikation

1) Drehung: A orthogonal & $\det(A) = +1$
2) Spiegelung: A orthogonal & $A^T = A$
3) Drehspiegelung: A orthogonal & (1), (2) treffen nicht zu

Drehmatrix

$\mathbb{R}^2 : D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{R}^3 : D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Eigenwertgleichung (EWG), Eigenwert (EW), Eigenvektor (EV)

$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$ ← Eigenvektor zum EW λ von A

Eigenwert: Lösung λ der EWG von A

Bestimmen der EW von $A \in K^{(n,n)}$

$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff (A - \lambda E)\vec{x} = 0$

$\det(A - \lambda E) \neq 0$

$\Rightarrow$ nur triviale Lsg $\vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ kein EV, λ kein EW

$\det(A - \lambda E) = 0$

$\Rightarrow \exists$ Lsg $\vec{x} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x}$ ist EV, λ ist EW von A

charakteristische Polynom von $A \in K^{(n,n)}$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & & a_{1n} \\ \vdots & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

a) Polynom vom Grad n

b) λ ist EW von $A \iff P(\lambda) = 0$

c) Ist $K = \mathbb{C} \Rightarrow A$ hat genau n EW (gezählt mit Vielfachheiten)
Ist $K = \mathbb{R} \Rightarrow A$ hat $\leq n$ EW in K

EV von $A \in K^{(n,n)}$

$E(A, \tilde{\lambda}) := \{\vec{x} \in K^n \mid A\vec{x} = \tilde{\lambda}\vec{x}\}$

$\Rightarrow \vec{x}$ ist EV von A zum EW $\lambda = \tilde{\lambda} \iff \vec{x} \in E(A, \tilde{\lambda}), \vec{x} \neq \vec{0}$

$E(A, \tilde{\lambda})$ ist lin. UR von K^n

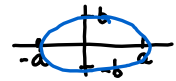
Ist $\lambda = \tilde{\lambda}$ k-facher EW $\Rightarrow 1 \leq \dim(E(A, \tilde{\lambda})) \leq k$

k ist algebraische Vielfachheit $(av(A, \tilde{\lambda}))$

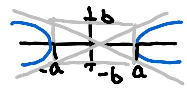
$\dim(E(A, \tilde{\lambda}))$ ist geometrische Vfh. $(gv(A, \tilde{\lambda}))$

quadratische Formen

Ellipsengleichung: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Hyperbelgleichung: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



quadratische Form: $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ mit $A = A^T$ symm.

Lineare Koordinatentransformation

Darstellung eines Vektors $\vec{x}$ in verschiedene Basen des $\mathbb{R}^n$

a) Standardbasis $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$

$\rightarrow \vec{x} = x_1 \cdot \vec{e_1} + \dots + x_n \cdot \vec{e_n}$

b) neue Basis $\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n}$

$\rightarrow \vec{x} = u_1 \cdot \vec{b_1} + \dots + u_n \cdot \vec{b_n}$

$u_1, \dots, u_n$ Koordinaten von $\vec{x}$ bzgl. neuer Basis $(\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n})$

c) Transformationsgleichung

$\rightarrow$ Umrechnen von $\vec{x}$ und $\vec{u}$

$T = (\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n})$ invertierbar

$\rightarrow \vec{x} = T \cdot \vec{u} \iff \vec{u} = T^{-1} \vec{x}$

Hauptachsentransformation

Transformationsformel

quadrat. Gleichung in $\vec{x}$: $\vec{x}^T A \vec{x}$ mit $\vec{x} = T\vec{u}$

$\rightarrow \vec{u}^T (T^T \cdot A \cdot T) \vec{u} = d$

T orthogonal $(T^T = T^{-1})$ $\Rightarrow$ neues KOS rechtwinklig

$D = T^T \cdot A \cdot T$ Diagonalmatrix, symmetrisch,
auf Hauptdiagonalen EW (sonst 0) $\vec{b_i}$ ist EV zu EW λ_i

Satz:
1) Alle EW von A reell $\rightarrow$ A hat n reelle EW (algebraische Vfh!)
2) EV zu versch. EW sind orthogonal
3) für jeden EW sind av und gv gleich
4) $\exists$ ONB des $\mathbb{R}^n$ bestehend aus EV von A

affine Abbildungen

$F: K^n \to K^m$ affine Abb. $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in K^n: F(\vec{x}) = M\vec{x} + \vec{b}$
mit $M \in K^{(m,n)}$ und $\vec{b} \in K^m$

$$\begin{tikzcd} \vec{x} \in K^n \arrow[r, bend left, "\text{Lin. Abb.}"] \arrow[rr, bend right, "\text{affine Abb.}"'] & M\vec{x} \in K^m \arrow[r, bend left, "\text{Verschiebung}"] & M\vec{x} + \vec{b} \end{tikzcd}$$

affine Koordinatentransformation

affines Koordinatensystem: (Punkt; Basis)

a) Standardsystem $(\vec{0}; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \to \vec{x} = \vec{0} + x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n$

b) neues KOS $(\vec{r}_0; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) \to \vec{x} = \vec{r}_0 + u_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + u_n \cdot \vec{b}_n$

c) Transformation: $\vec{x} = \vec{r}_0 + T\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = T^{-1}(\vec{x} - \vec{r}_0)$

Funktion

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt durch

1) $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ Definitionsbereich
2) eindeutige Zuordnungsvorschrift $\underline{x} \in D_f \mapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

Darstellung:

$$\mathrm{graph}(f) := \left\{ f(\underline{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \begin{matrix} \underline{x} \in D_f \\ x_{n+1} = f(\underline{x}) \end{matrix} \right\}$$

$$\underset{\text{abhängig}}{x_{n+1}} = f(\underset{\text{unabhängig}}{x_1, \ldots, x_n})$$

Niveaumengen von f

$N_c(f) := \{\underline{x} \in D_f \mid f(\underline{x}) = c\}$ $\quad c \in \mathbb{R}$ $\quad , N_c(f) \subseteq \mathbb{R}^n$

Schnittkurve von f im Punkt $\underline{a}$ in x_i-Richtung

$x_i \in D' \subseteq \mathbb{R} \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}$

Punktmengen

Abstand: $\|\underline{a} - \underline{b}\|$

offene ε-Umgebung: $U_\varepsilon(\underline{a}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R} \mid \|\underline{x} - \underline{a}\| < \varepsilon\}$

innerer Punkt: $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(\underline{a}) \subseteq D$

Randpunkt: $\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(\underline{a}) \cap D \neq \emptyset \;\wedge\; U_\varepsilon(\underline{a}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus D) \neq \emptyset$

Rand: Menge der Randpunkte $\to$ ∂D bzw. $\mathrm{bd}(D)$

Inneres: Menge der inneren Punkte $\to$ $\mathrm{int}(D)$

Häufungspunkt: jede Umgebung von $\underline{a}$ enthält unendlich viele Punkte aus D (Menge: $\mathrm{hp}(D)$)

isolierter Punkt: $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(\underline{a}) \cap D = \{\underline{a}\}$

D offen, falls D keine Randpunkte

$\Rightarrow \partial D \cap D = \emptyset \Leftrightarrow D = \mathrm{int}(D)$

D abgeschlossen, falls D alle Randpunkte enthält

$\Rightarrow \partial D \subseteq D \Leftrightarrow \mathrm{hp}(D) \subseteq D \Leftrightarrow \partial\overline{D} \subseteq D$

$\Leftrightarrow \partial\overline{D} \cap \overline{D} = \emptyset \Leftrightarrow \overline{D}$ offen

Grenzwert von Punktfolgen

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{a} \iff \lim_{k\to\infty} \|\underline{x}^{(k)} - \underline{a}\| = 0$$

$$\iff \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$$

Grenzwert von Funktionen

Fkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $D = D_f \subseteq \mathbb{R}$

Punkt $\underline{a} \in D \cup \mathrm{bd}(D)$

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = g \qquad g \in \mathbb{R} \text{ oder } g = \pm\infty$$

falls $\forall$ Punktfolgen $\underline{x}^{(k)}$ mit $\underline{x}^{(k)} \neq \underline{a}$ aus D und $\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{a}$ gilt: $\lim_{k\to\infty} (f(\underline{x}^{(k)})) = g$

f stetig in $\underline{a} \in D \iff \lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$

f stetig auf D, falls f stetig in $\underline{a}$ ist $\forall\, \underline{a} \in D$

Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Verkettung von stetigen Funktionen sind wieder stetig

Projektionsfunktionen $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind stetig

$$\pi_i(x_1, \dots, x_n) := x_i$$

Partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{a}+h\cdot e_i) - f(\underline{a})}{h}$$

part. Abl. von f nach x_i an der Stelle $\underline{x}=\underline{a}$, sofern der GW existiert und endlich ist

$\Rightarrow$ Anstieg der Tangenten an die Schnittkurve von f in x_i-Richtung im Punkt $\underline{x}=\underline{a}$

$\Rightarrow$ linearer Zuwachs in x_i-Richtung

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ wird gebildet wie normale Abl., alle $x_j \neq x_i$ werden wie Konstanten behandelt

$\hat{=} f_{x_i}(\underline{a})$

Gradient

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a})\right)$$

f stetig differenzierbar

$\Leftrightarrow \forall \underline{x} \in D \ \exists$ partielle Abl. nach allen Variablen existieren und sind dort stetig

$\Rightarrow$ zeigt in Richtung des größten Anstiegs von f im Punkt $\underline{x}=\underline{a}$

+ steht senkrecht auf der Tangente

Tangentialraum von f an der Stelle $\underline{x}=\underline{a}$

$$x_{n+1} = f(\underline{a}) + f_{x_1}(\underline{a})(x_1-a_1) + \dots + f_{x_n}(\underline{a})\cdot(x_n-a_n)$$

Hyperebene $n=1$: Tangente $n=2$: Tangentialebene

$$\rightarrow x_{n+1} = f(\underline{a}) + \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot \begin{pmatrix} x_1-a_1 \\ \vdots \\ x_n-a_n \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{a}+h\cdot\underline{v}) - f(\underline{a})}{h} \qquad \underline{v}\in\mathbb{R}^n \quad \underline{v}\neq\underline{0}$$

Richtungsabl. von f nach $\underline{v}$ an der Stelle $\underline{x}=\underline{a}$, sofern der GW existiert und endlich ist

Ist f stetig diffbar auf $D\subseteq\mathbb{R}^n$, so gilt: $\forall \underline{a}\in D, \underline{v}\neq\underline{0} \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{1}{\|v\|}\cdot \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), \underline{v}\rangle$$

Für $\underline{v} = \operatorname{grad} f(\underline{a})$ ist $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a})$ am größten mit

$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \|\operatorname{grad} f(\underline{a})\|$, falls $\underline{v} = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \neq \underline{0}$

Differential einer Funktion f

totales Differential : $df(\underline{x}, d\underline{x}) = \langle \operatorname{grad} f(\underline{x}), d\underline{x} \rangle$

$\underline{x}$: Argumente von f $\qquad = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\underline{x}) \cdot dx_i$

$d\underline{x}$: Argumentdifferential

kurz: $df = f_{x_1} \cdot dx_1 + \ldots + f_{x_n} \cdot dx_n$

Funktionswertdifferenz

$$\Delta f(\underline{x}, d\underline{x}) := f(\underline{x} + d\underline{x}) - f(\underline{x})$$

f vollständig / total differenzierbar an der Stelle $\underline{x} = \underline{a} \in D$

$$\Leftrightarrow \lim_{\|d\underline{x}\| \to 0} \frac{\Delta f(\underline{x}, d\underline{x}) - df(\underline{x}, d\underline{x})}{\|d\underline{x}\|} = 0$$

Ist f stetig differenzierbar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist f für alle $\underline{x} \in D$ total differenzierbar

Regeln

1) $d(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot df \qquad \alpha \in \mathbb{R}$
2) $d(f \pm g) = df \pm dg$
3) $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$

Kettenregel

geg: verkettete Fkt : $H(\underline{u}) = f(g_1(\underline{u}), \ldots, g_n(\underline{u}))$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial u_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial u_k}$$

$$= \underbrace{\operatorname{grad} f(g_1(\underline{u}), \ldots, g_n(\underline{u}))}_{\text{äußere Abl}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} g_{1u_k} \\ \vdots \\ g_{nu_k} \end{pmatrix}}_{\text{innere Abl}}$$

zwei Möglichkeiten:

Bsp: $f(x,y) = x \cdot y \qquad x = u+v \qquad y = u-v$

$H(u,v) = f(u+v, u-v) = (u+v) \cdot (u-v) = u^2 - v^2$

① $\Rightarrow H_u = 2u \qquad H_v = -2v$

② $H_u = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{\substack{x=u+v \\ y=u-v}} = y \cdot 1 + x \cdot 1 \Big|_{\substack{x=u+v \\ y=u-v}} = 2u$

H_v analog

implizite Funktionen / Auflösungssatz

Ist F in einer Umgebung von $\underline{x_0}$ stetig diffbar und ist $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ so gibt es Intervalle I, J derart dass gilt:

$\forall x \in I\ \forall y \in J: F(x,y) = c \iff y = g(x)$ mit

$g: I \to J$ Fkt und $x_0 \in I,\ y_0 \in J$.

$\Rightarrow g$ implizit definiert durch $F(x,y) = c$ mit $g(x_0) = y_0$

$\Rightarrow$ Ableitung: $g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}$

$\Rightarrow$ Taylorapproximation: $T = g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0)$

partielle Ableitung k-ter Ordnung

$$f_{x_1 x_2 \dots x_k} = \frac{\partial^k f}{\partial x_k \dots x_2 x_1}$$

Die Fkt f heißt k-mal stetig diff'bar auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, falls für alle $x \in D$ sämtliche partiellen Ableitungen von f bis zur k-ten Ordnung existieren und in $\underline{x}$ stetig sind.

Satz von Schwarz

f auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 2-mal stetig diffbar

$$\Rightarrow \forall \underline{x} \in D: \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad i,j \in \{1, \dots, n\}$$

Differential k-ter Ordnung

$df = f_{x_1} \cdot dx_1 + \dots + f_{x_n} \cdot dx_n$

$d^k f = d(d^{k-1} \dots f)$

Hesse-Matrix der Fkt f an der Stelle $\underline{x}$

$$H_f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\underline{x}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\underline{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\underline{x}) & \dots & f_{x_n x_n}(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

- Satz von Schwarz $\Rightarrow H_f(\underline{x})$ ist symmetrisch (2mal stetig diffbar)
- $d^2(f(\underline{x})) = d\underline{x} \cdot H_f \cdot d\underline{x}^T$
- $f(\underline{x} + d\underline{x}) = f(\underline{x}) + df(\underline{x}, d\underline{x}) + \frac{1}{2} d^2 f(\underline{x}, d\underline{x}) + R(\underline{x}, d\underline{x})$

  mit $\lim_{\|d\underline{x}\| \to 0} \frac{R(\underline{x}, d\underline{x})}{\|d\underline{x}\|} = 0$

quadratische Approximation   Taylorpolynom

geg: $f(\underline{a})$, $\operatorname{grad} f(\underline{a})$, $H_f(\underline{a})$

ges: $f(\underline{x})$ für $\underline{x}$ nahe $\underline{a}$

Lsg: Setzen $d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$, also $\underline{x} = d\underline{x} + \underline{a}$

$\Rightarrow f(\underline{x}) = f(d\underline{x} + \underline{a}) \Rightarrow$ für $\|d\underline{x}\|$ nahe 0 gilt:

$$f(\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + df(\underline{a}, d\underline{x}) + \tfrac{1}{2} d^2 f(\underline{a}, d\underline{x})$$
$$\approx f(\underline{a}) + \langle \operatorname{grad} f(\underline{a}), d\underline{x} \rangle + \tfrac{1}{2}\, d\underline{x} \cdot H_f(\underline{a}) \cdot d\underline{x}^T$$

1. Taylorpolynom:
$$T_{f,1,\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot (\underline{x} - \underline{a})^T$$

2. Taylorpolynom:
$$T_{f,2,\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot (\underline{x} - \underline{a})^T + \tfrac{1}{2} (\underline{x} - \underline{a}) \cdot H_f(\underline{a}) \cdot (\underline{x} - \underline{a})^T$$

n-tes Taylorpolynom:
$$T_{f,n,\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(\underline{a}, d\underline{x})$$

Ist $\underline{a}$ eine extremwertverdächtige Stelle, so ist $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = 0$ und es gilt: $f(\underline{x}) = f(d\underline{x} + \underline{a}) \approx f(\underline{a}) + \tfrac{1}{2}\, d\underline{x} \cdot H_f(\underline{a}) \cdot d\underline{x}^T$ für $\underline{x}$ nahe $\underline{a}$

positiv bzw. negativ definite Matrizen

S symmetrische Matrix, quadratische Form $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $q(\underline{x}) = \underline{u} S \underline{u}^T$

$$\forall \underline{u} \neq \underline{0} \in \mathbb{R}: \underline{u} S \underline{u}^T \begin{Bmatrix} > 0 \\ \geq 0 \\ < 0 \\ \leq 0 \end{Bmatrix} \text{ so gilt: } \begin{cases} \text{positiv definit} \\ \text{positiv semidefinit} \\ \text{negativ definit} \\ \text{negativ semidefinit} \end{cases}$$

Determinanten-Kriterium

$S^{(k)}$ Hauptuntermatrix k-ter Ordnung (Hauptminor)

Es gilt:
- S positiv definit $\Leftrightarrow \det(S^{(k)}) > 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$
- S negativ definit $\Leftrightarrow \det(S^{(k)}) = \begin{cases} < 0 & \text{ungerade } k \\ > 0 & \text{gerade } k \end{cases}$

$$S = \begin{array}{c} S^{(1)} \quad S^{(2)} \quad S^{(3)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

globale Extremwerte

$\max\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\}$ bzw. $\min\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in D\}$

$\underline{a} \in D$ und $f(\underline{a}) = -"-$

$\Rightarrow \underline{x} = \underline{a} \Rightarrow$ globale Maximalstelle / Minimalstelle

$f(\underline{x}) = \underline{a} \Rightarrow$ globales Maximum / Minimum

Satz von Weiherstraß $\Rightarrow$ Existenz glob. EW.

$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ stetige Fkt, D_f abgeschlossen & beschränkt

$\Rightarrow f$ besitzt auf D ein glob. Max. und ein glob. Min.

im inneren von D oder auf dem Rand

lokale Extremstellen im Inneren von D

notwendige Bedingung

Voraussetzung: f stetig diff'bar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$\underline{a} \in D$ innerer Punkt

$\Rightarrow \underline{a}$ lok. ES $\Leftrightarrow \operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$, d.h. $\forall i: f_{x_i}(\underline{a}) = 0$

hinreichende Bedingung

Voraussetzung: f 2x stetig diff'bar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$\underline{a} \in D$ innerer Punkt

$\underline{a}$ extremwertverdächtig

$\Rightarrow$
- $H_f(\underline{a})$ pos. definit $\Rightarrow \underline{a}$ lok. Minimalstelle
- $H_f(\underline{a})$ neg. definit $\Rightarrow \underline{a}$ lok. Max.

a) $\left.\begin{array}{l}\det H_f(\underline{a}) > 0 \\ f_{xx}(\underline{a}) > 0\end{array}\right\}$ pos. definit $\Rightarrow \underline{a}$ lok. Minimalstelle

b) $\left.\begin{array}{l}\det H_f(\underline{a}) > 0 \\ f_{xx}(\underline{a}) < 0\end{array}\right\}$ neg. definit $\Rightarrow \underline{a}$ lok. Max.

c) $\det H_f(\underline{a}) < 0 \Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow \underline{a}$ keine ES / Sattelpunkt

d) $\det H_f(\underline{a}) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Extremwerte mit (Gleichungs-) Nebenbedingung

geg: Fkt f Zielfkt, Fkt g mit $D = \{ \underline{x} \in \mathbb{R} \mid g(\underline{x}) = 0 \}$

ges: lok. bzw. glob. EW von f auf D

Eigenschaften von D:

g stetig diff'bar auf $\mathbb{R}^n$ und $\operatorname{grad} g\,(\underline{x}) \neq \underline{0}$ für $\underline{x} \in D$

$\Rightarrow$ D keine inneren Punkte, D abgeschlossen, D beschränkt

$\Rightarrow$ f auf D glob. Max. und glob. Min.

Lsg:

a) Auflösung der Gl $g(\underline{x}) = \underline{0}$ nach einer Var. x_i

z.B. $i = n$: $x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$

Einsetzen von h in Zielfkt $\to$ neue Fkt $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$

mit $\tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$

Ist $(x_1, \dots, x_{n-1})$ ES von $\tilde{f}$, so ist $(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$ ES von f mit NB

b) Parametrisierung der Menge $D = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\underline{x}) = \underline{0} \}$

s. Skript

c) Multiplikatorenregel von Lagrange

1) Betrachten Ersatzfkt L auf $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$

$$\underbrace{L}_{\text{Lagrangefkt.}}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \underbrace{f(x_1, \dots, x_n)}_{\text{Ziel}} + \underbrace{\lambda}_{\text{Lagrangemultiplikator}} \cdot \underbrace{g(x_1, \dots, x_n)}_{\text{Neben}}$$

2) notwendige Bed.

extremwertverdächtige Stellen von L bestimmen

$\Rightarrow$ $(x_1, \dots, x_n)$ sind ex.verd. Stellen mit NB $g(\underline{x}) = 0$

3) hinreichende Bed. zu kompliziert

$\Rightarrow$ Punkte vergleichen

mit mehreren NB

geg: f, $g_1 = 0, \dots, g_p = 0$ $\quad (p < n,\ g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = f(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot g_i(\underline{x})$

Rest analog

globale EW von f auf D

geg: Zielfkt f, Menge $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 3 \}$

Lsg:

a) $\left.\begin{array}{l} D \text{ abgeschlossen und beschränkt} \\ f \text{ stetig auf } D \end{array}\right\}$ Weierstraß

b) innere Punkte überprüfen

c) Rand überprüfen

d) Auswertung

Differentialgleichungen (DGL)

gewöhnliche DGL: $F(t, y, y', y'', \dots) = 0$ für $y = y(t)$

$\Rightarrow$ Ordnung: höchste auftretende Ableitungsordnung

explizite DGL 1. Ord.: $y' = f(t, y)$

DGL mit getrennten Variablen: $y' = g(t) \cdot h(y)$

Ähnlichkeits-DGL: $y' = f(t, y) = h\left(\frac{y}{t}\right)$ $\quad t, y \in D;\ t \neq 0$

exakte DGL:
$$\left.\begin{aligned} P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' &= 0 \\ P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy &= 0 \end{aligned}\right\} \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

lineare DGL: $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y_0 = b$

Ansätze:

Störfkt $b(t)$	Ansatz für y_s (ohne Resonanz)
$Q(t)$ vom Grad m	$y_s = A_m t^m + \dots + A_1 t + A_0$
$Q(t) \cdot e^{\alpha t}$	$y_s = (A_m t^m + \dots + A_1 t + A_0)\, e^{\alpha t}$
$c \cdot e^{\alpha t}$	$y_s = A_0 e^{\alpha t}$
$Q(t) \cdot \cos(bt)$, $Q(t) \cdot \sin(bt)$	$y_s = (A_m t^m + \dots + A_0) \cdot \cos(bt) + (B_m t^m + \dots + B_0) \cdot \sin(bt)$
$Q(t) \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(bt)$, $Q(t) \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(bt)$	$y_s = (A_m t^m + \dots + A_0) \cdot \cos(bt) \cdot e^{\alpha t} + (B_m t^m + \dots + B_0) \cdot \sin(bt) \cdot e^{\alpha t}$

gilt $b(t) = b_1(t) + b_2(t) + \dots \Rightarrow$ für jedes b_i eigener Ansatz

Resonanzfall:

Teile (Summanden) der Inhomogenität sind Lösung der homogenen Gleichung (lassen sich damit einer Nullstelle des char. Pol. zuweisen)

Inhomogenität $b(t)$	Resonanzfall, falls λ Nst von $P(\lambda)$
$e^{at}(Q_1(t) \cdot \cos(bt) + Q_2(t) \cdot \sin(bt))$	$\lambda = a + ib$
$Q(t) \cdot e^{at}$	$\lambda = a$
$Q(t) \cdot \cos(bt)$ bzw. $Q(t) \cdot \sin(bt)$	$\lambda = ib$
$Q(t)$	$\lambda = 0$

$\Rightarrow$ Ansatz mit Resonanz = Ansatz ohne Resonanz $\cdot\, t^{\alpha}$

α = Vfh. der Nst λ von $P(\lambda)$