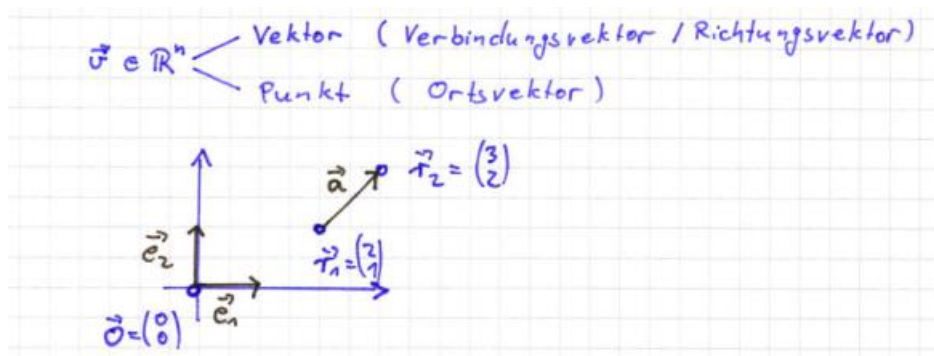


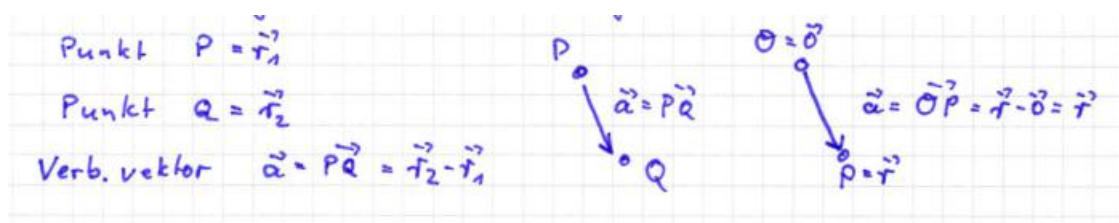
Mathematik Skript

5.4 Affine Unterräume

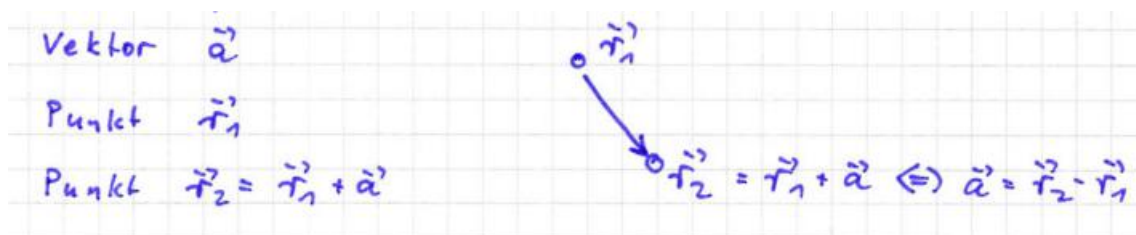
5.4.1 Der Vektorraum \mathbb{R}^n als Punktraum



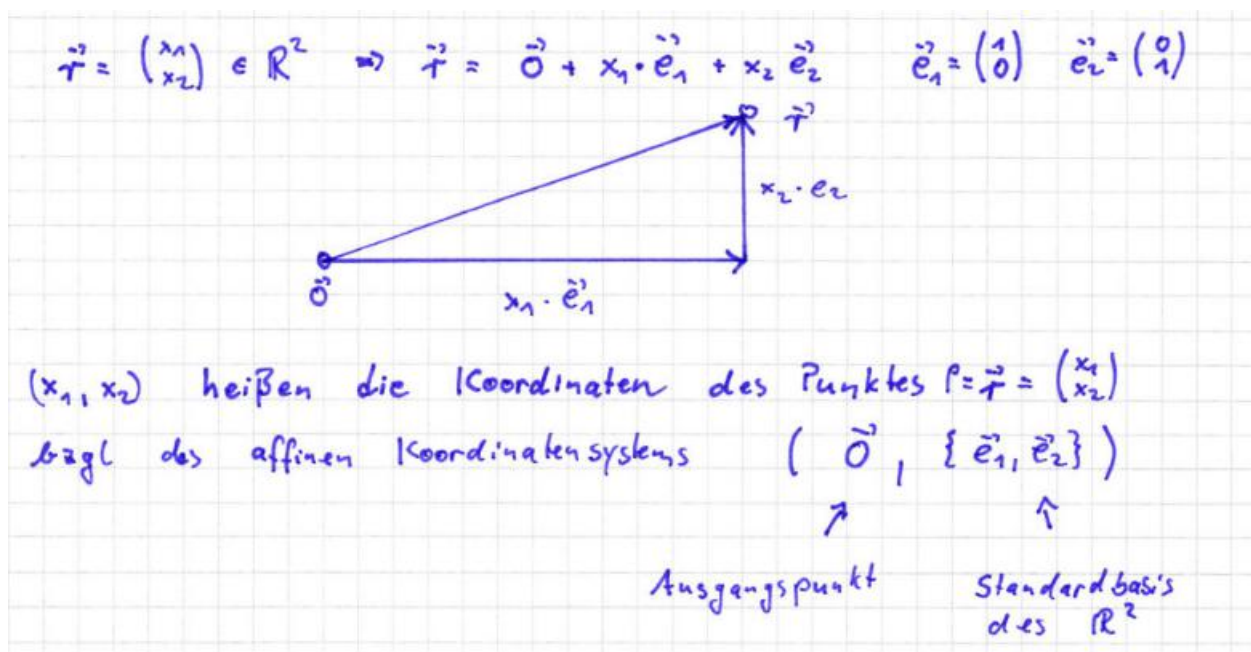
a) Verbindungsvektor bzw. Richtungsvektor zweier Punkte



b) Abtragen eines Vektors an einem Punkt



Koordinaten eines Punktes



c) Abtragen einer Vektormenge an einem Punkt

Vektormenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$

Punkt $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^n$

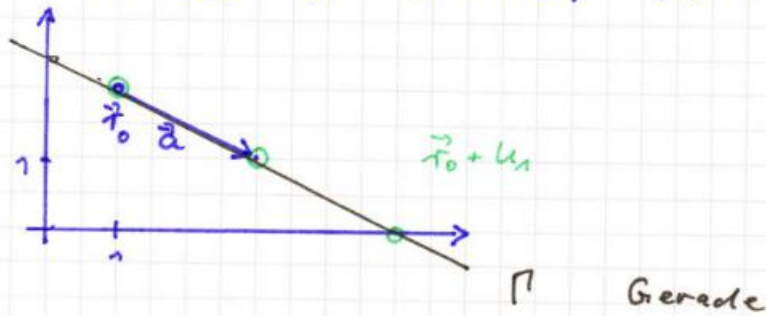
Punktmenge $\vec{r}_0 + U := \{ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x} \mid \vec{x} \in U \} \subseteq \mathbb{R}^n$

Bsp: $n = 2$ $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) $U_1 = \{ \vec{0}, \vec{a}, 2\vec{a} \} \Rightarrow \vec{r}_0 + U_1 = \{ \vec{r}_0 + \vec{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{r}_0 + \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r}_0 + 2\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

b) $U_2 = [\vec{a}] = \{ \vec{x} = t\vec{a} \mid t \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$ linearer U \mathbb{R}

$\Rightarrow \Gamma = \vec{r}_0 + U_2 = \{ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x} \mid \vec{x} \in U \} = \{ \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a} \mid t \in \mathbb{R} \}$



$$\vec{r} \in \Gamma = \vec{r}_0 + U \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x}, \vec{x} \in U \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 \in U$$

5.4.2 Affine Unterräume des \mathbb{R}^n

Definition

Def: Die Vektormenge (Punktmenge) $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$\Gamma = \vec{r}_0 + U$$

heißt affiner Unterraum des \mathbb{R}^n , falls gilt
 $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist linearer Unterraum.

Weiterhin ist $\dim(\Gamma) := \dim(U)$ die

Dimension von Γ

Für einen Affinen UR $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ gilt

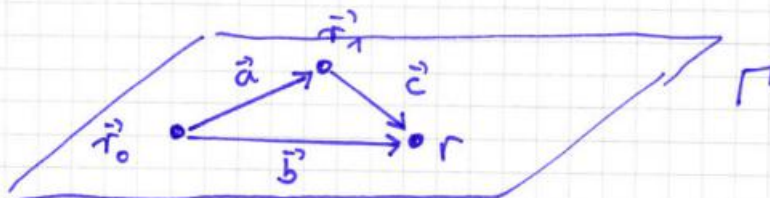
$$(1) \vec{r} \in \Gamma \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x} \text{ mit } \vec{x} \in U \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 \in U$$

$$(2) \vec{0} \in U, \text{ woraus folgt } \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{0} = \vec{r}_0 \in \Gamma$$

$$\Gamma = \vec{r}_0 + U$$

\uparrow spezieller Punkt von Γ \nwarrow Richtungsvektoren von Γ

$$(3) \text{ Ist } \vec{r}_1 \in \Gamma, \text{ so gilt } \Gamma = \vec{r}_1 + U$$



Bew. $\vec{r}_1 \in \Gamma \Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{a} \quad \vec{a} \in U$

$$\begin{aligned}
 (\Gamma \subseteq \vec{r}_1 + U) \quad \vec{r} \in \Gamma &\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{b} \quad \vec{b} \in U \\
 &\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) + \vec{b} \\
 &\quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \underbrace{-\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{c}} \quad (\vec{a}, \vec{b} \in U \Rightarrow -\vec{a} + \vec{b} \in U) \\
 &\quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{c} \quad \text{mit } \vec{c} \in U \\
 &\Rightarrow \vec{r} \in \vec{r}_1 + U
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Gamma + U \subseteq \Gamma) \quad \vec{r} \in \vec{r}_1 + U &\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{c} \quad \text{mit } \vec{c} \in U \\
 &\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \underbrace{\vec{a} + \vec{c}}_{\vec{b}}, \quad \vec{a}, \vec{c} \in U \\
 &\quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{b} \quad \vec{b} \in U \\
 &\Rightarrow \vec{r} \in \Gamma
 \end{aligned}$$

$$(4) \text{ Ist } \vec{r} = \vec{0} \in \Gamma \text{ so ist } \Gamma = \vec{0} + U = U$$

$$\begin{aligned}
 (5) \text{ Ist } \dim(\Gamma) = 0, \text{ so ist } \dim(U) = 0 \Rightarrow U = \{\vec{0}\} \\
 \Rightarrow \Gamma = \vec{r}_0 + U = \{\vec{r}_0\} \quad \text{ein Punkt}
 \end{aligned}$$

Parameterdarstellung von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$

Ist $d = \dim(\Gamma) = \dim(U) \geq 1$ so wählen wir eine Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d\}$ von U . Dann ist $U = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d] = \{\vec{x} = t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_d \vec{a}_d \mid t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}\}$ und für $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ gilt

$$\vec{r} \in \Gamma \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_d \vec{a}_d, \quad t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$$

↑
heißt Parameterdarstellung von Γ

Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + A \cdot \vec{t} \quad A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d) \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix}$$

Spezialfälle

- $d = 0$ $\Gamma = \{\vec{r}_0\}$ Punkt
- $d = 1$ $\Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{a}_1]$ Gerade
- $d = 2$ $\Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ Ebene
- $d = n$ Dann ist $U = \mathbb{R}^n \Rightarrow \Gamma = \vec{r}_0 + U = \mathbb{R}^n$ der ganze Raum
- $d = n-1$ $\Gamma =$ Hyperebene

Bemerkung (wichtig)

Sämtliche obige Definitionen und Aussagen können auf beliebige Vektorräume verallgemeinert werden.

$$\begin{array}{lll} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & K\text{-VR } V \quad \longrightarrow \quad \text{Bsp: } V = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ \vec{r}_0 \in \mathbb{R}^n \text{ Punkt} & \longrightarrow & \vec{r}_0 \in V \text{ beliebiger Vektor} \quad \longrightarrow \quad \vec{r}_0 = 1 \text{ konstante Funktion} \\ \Gamma = \vec{r}_0 + U & \longrightarrow & \Gamma = \vec{r}_0 + U \\ \text{affiner UR des } \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \text{aff UR von } V \\ \text{falls } U \text{ lin UR} & \longrightarrow & \text{falls } U \text{ lin UR} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \Gamma = 1 + [\cos, \sin] \\ = \{f \mid f(x) = 1 + t_1 \cos x + t_2 \sin x \\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Parameterfreie Darstellung von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$

Γ ist Lösungsmenge eines LGS

Bsp: • $\Gamma = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid A \vec{r} = \vec{b} \}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

•

x_1	x_2	x_3	
1	2	-3	4
0	1	-1	2

 $\begin{matrix} \swarrow & -2 \cdot \\ \searrow & + \end{matrix}$

x_1	x_2	x_3	
1	0	-1	0
0	1	-1	2

$x_1 - x_3 = 0$

$x_2 - x_3 = 2$

$x_3 = t$

$\Rightarrow x_1 = x_3 = t$

$\Rightarrow x_2 = 2 + x_3 = 2 + t$

• Lösungen $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

• $\Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{a}]$ mit $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.4.3 Hauptsatz über Lineare Gleichungssysteme

Def

Seien $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ und
 $\Gamma = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid A \vec{r} = \vec{b} \}$
 $\mathcal{U} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A \vec{x} = \vec{0} \}$

Dann gilt

- (1) $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist linearer UR mit $\dim(\mathcal{U}) = n - \text{rg}(A)$
- (2) $\Gamma \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A, \vec{b})$
- (3) Ist $\Gamma \neq \emptyset$ und $\vec{r}_0 \in \Gamma$, so ist Γ ein affiner UR
mit $\Gamma = \vec{r}_0 + \mathcal{U}$
und $\dim(\Gamma) = \dim(\mathcal{U}) = n - \text{rg}(A)$

Beweis

- (1) Siehe (5.3.2) und (5.3.5) (R4)
- (2) Siehe (5.3.5) (R5)
- (3) Zeigen a) $\Gamma \subseteq \vec{r}_0 + \mathcal{U}$ und b) $\vec{r}_0 + \mathcal{U} \subseteq \Gamma$

zu a) $\vec{r} \in \Gamma$, d.h. $A \vec{r} = \vec{b}$
 $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x}$ mit $\vec{x} = \vec{r} - \vec{r}_0$
 $A \vec{x} = A(\vec{r} - \vec{r}_0) = A \vec{r} - A \vec{r}_0 \stackrel{\vec{r}, \vec{r}_0 \in \Gamma}{=} \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{x} \in \mathcal{U} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x}$ mit $\vec{x} \in \mathcal{U} \Rightarrow \vec{r} \in \vec{r}_0 + \mathcal{U}$

zu b) $\vec{r} \in \vec{r}_0 + \mathcal{U} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x}$ mit $\vec{x} \in \mathcal{U}$
 $\Rightarrow A \vec{r} = A(\vec{r}_0 + \vec{x}) = A \vec{r}_0 + A \vec{x}$
 $\stackrel{\substack{\vec{r}_0 \in \Gamma \\ \vec{x} \in \mathcal{U}}}{=} \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$
 $\Rightarrow \vec{r} \in \Gamma$

■

Bemerkung

Bemerkung 1

Satz und Beweis gelten analog, wenn statt \mathbb{R}^n \mathbb{K}^n benutzt wird.

Bemerkung 2

$$\begin{array}{rcl} \Gamma & = & \vec{r}_0 + U \\ \{ \vec{r} \mid A\vec{r} = \vec{b} \} & = & \vec{r}_0 + \{ \vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{0} \} \\ \uparrow & & \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \text{(allgemeine)} & & \text{spezielle} \quad \quad \text{Lösungsmenge} \\ \text{Lösungsmenge des} & & \text{Lösung des} \quad \quad \text{des homogenen} \\ \text{inhomogenen LGS } A\vec{x} = \vec{b} & & \text{inhom. LGS } A\vec{r} = \vec{b} \quad \text{LGS } A\vec{x} = \vec{0} \\ & & \text{d.h. } A\vec{r}_0 = \vec{b} \end{array}$$

Änderung von \vec{b} bewirkt nur Änderung von \vec{r}_0
(Parallelverschiebung), solange noch eine Lösung existiert.

Bemerkung 3

Verallgemeinerung auf allgemeine Vektorräume
ist möglich und folgt später.

Spezialfall

Spezialfall Hyperebene im \mathbb{R}^n

- $m = 1$ Gleichung $n \geq 2$ Unbekannte
- $A = \underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{(1,n)}$ $\vec{b} = (b) \in \mathbb{R}^1$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\Gamma = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{a} \cdot \vec{x} = b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b \right\}$$

- Ist $\underline{a} \neq \underline{0}$ so ist $\text{rg}(A) = \text{rg}(A, \vec{b}) = 1$ und somit $\Gamma \neq \emptyset$ und $\dim \Gamma = n-1$

$\Rightarrow \Gamma$ ist Hyperebene des \mathbb{R}^n
($n=2$ Gerade, $n=3$ Ebene)

- Die Mengen

$$\Gamma^+ = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{a} \cdot \vec{x} \geq b \right\}$$

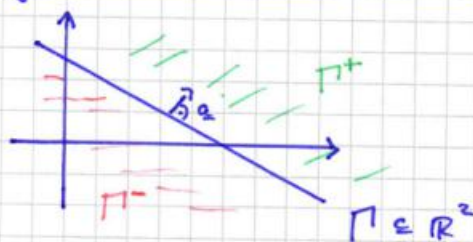
$$\Gamma^- = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{a} \cdot \vec{x} \leq b \right\}$$

heißen dann abgeschlossene Halbräume des \mathbb{R}^n

Es gilt dann:

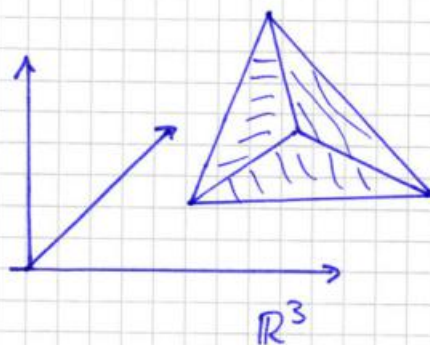
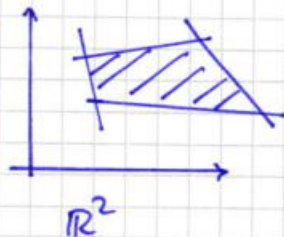
$$\Gamma = \Gamma^+ \cap \Gamma^-$$

$$\mathbb{R}^n = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$$



- $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Polyeder, falls P Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen des \mathbb{R}^n ist.

Beispiele



Bemerkung

Polyeder sind wichtig in linearer Optimierung

5.4.4 Affine Unterräume durch vorgegebene Punkte

Def

Gegeben

$$\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_d \in \mathbb{R}^n \quad d+1 \text{ Punkte des } \mathbb{R}^n \quad (d \geq 1)$$

Gesucht

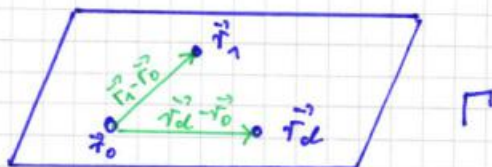
kleinster aff. UR $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, der die Punkte $\vec{r}_0, \dots, \vec{r}_d$ enthält.

Bezeichnung

$$\Gamma = \Gamma(\vec{r}_0, \dots, \vec{r}_d)$$

Lösung

Lösung



- $\Gamma =$ spezieller Punkt + LinUR U $U =$ Menge der RV
 \uparrow wählen \vec{r}_0 \uparrow
 $U = [\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \dots, \vec{r}_d - \vec{r}_0]$
 Erzeugendensystem von U
 nicht unbedingt Basis

$$\Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \dots, \vec{r}_d - \vec{r}_0]$$

$$\dim(\Gamma) = \text{rg}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \dots, \vec{r}_d - \vec{r}_0) \leq d$$

Bsp: $n = 3$ 3 Punkte $(d = 2)$

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \Gamma(\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix} = 2(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)$$

$$\Rightarrow U = [\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{r}_2 - \vec{r}_0] = [\vec{r}_1 - \vec{r}_0] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \quad \dim(U) = 1$$

$$\Gamma = \vec{r}_0 + U = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \dim(\Gamma) = 1$$

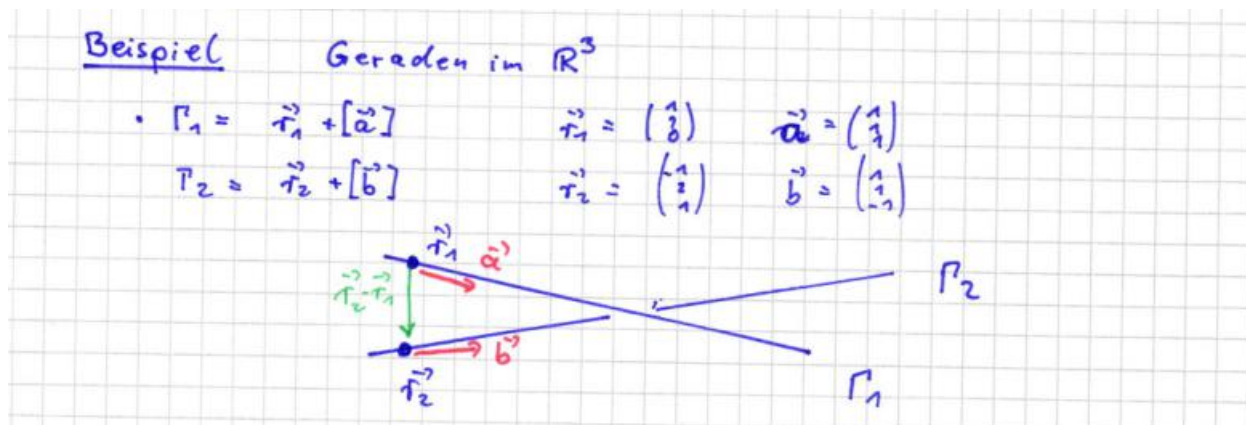
Bemerkung

Bemerkung

$\Gamma(\vec{r}_0, \dots, \vec{r}_d)$ wird auch affine Hülle
der Punkte $\vec{r}_0, \dots, \vec{r}_d$ genannt

5.4.5 Lagebeziehungen affiner Unterräume

Beispiel



a)

$\vec{r}_2 \in \Gamma_1 ?$ (liegt \vec{r}_2 auf Γ_1 ?)
 $\vec{r}_2 \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + t \vec{a}, t \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = t \cdot \vec{a}, t \in \mathbb{R}$
 $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq t \cdot \vec{a} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall t \Rightarrow \vec{r}_2 \notin \Gamma_1$

b)

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ (Schnitt von Γ_1 und Γ_2)
 $\vec{r} \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \Leftrightarrow \vec{r} \in \Gamma_1 \wedge \vec{r} \in \Gamma_2$
 $\Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 + t \vec{a} \wedge \vec{r} = \vec{r}_2 + s \vec{b}$
 $\Rightarrow \vec{r}_1 + t \vec{a} = \vec{r}_2 + s \vec{b}$
 $\Leftrightarrow \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = t \vec{a} - s \vec{b}$
 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2 = t - s \\ 0 = t - s \end{matrix}$
 inhomogenes LGS
 ohne Lösung
 $\Rightarrow \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$

c)

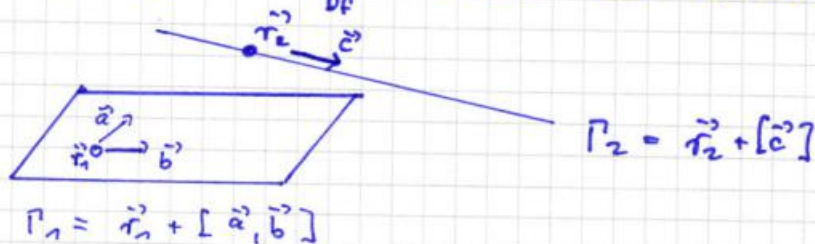
$\Gamma_1 \parallel \Gamma_2$? (Γ_1 parallel zu Γ_2)
 $[\vec{a}] \neq [\vec{b}]$ Richtungsvektoren von Γ_1, Γ_2
verschieden

$\vec{a} \notin [\vec{b}]$ $\vec{b} \notin [\vec{a}]$
 also $\Gamma_1 \nparallel \Gamma_2$ (nicht parallel)

Geraden im \mathbb{R}^3 , die sich nicht schneiden und nicht parallel sind heißen windschief

Allgemeine Bedingung für Parallelität

$$\vec{r}_1 + U \parallel \vec{r}_2 + W \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} U \subseteq W \text{ oder } W \subseteq U$$



$\Gamma_1 = \vec{r}_1 + [\vec{a}, \vec{b}]$ $\Gamma_2 = \vec{r}_2 + [\vec{c}]$

$$\Gamma_1 \parallel \Gamma_2 \Leftrightarrow [\vec{c}] \subseteq [\vec{a}, \vec{b}] \Leftrightarrow \vec{c} \in [\vec{a}, \vec{b}]$$

Sind zwei aff UR identisch, so sind sie auch parallel.

Sind Γ_1, Γ_2 aff UR des \mathbb{R}^n , so ist

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ oder wieder ein aff. UR des \mathbb{R}^n
 (führt auf ein inhomogenes LGS)

Bemerkung

Sind $\Gamma_1 = \vec{r}_1 + U$ $\Gamma_2 = \vec{r}_2 + W$, so

führt Einsetzen der Parameterdarstellungen

zu einem inhomogenen LGS mit $\dim(U) + \dim(W)$

variablen zur Berechnung von $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$

Eine effizientere Berechnungsmethode für den

Schnitt bekommt man, wenn einer der aff UR

in parameterfreier Form gegeben ist, etwa $\Gamma_2 = \{\vec{r} \mid A\vec{r} = \vec{b}\}$.

Setzt man dann die Parameterdarstellung von

Γ_1 in die parameterfreie Darstellung von Γ_2 ein

erhält man ein LGS mit nur $\dim(U)$ variablen.

5.5 Euklidische Räume

Note

Euklidischer Raum $:= \mathbb{R} - VR$ mit Skalarprodukt

5.5.1 Skalarprodukt, Norm Winkel

(1)

(1) Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
 $a, b \in V \mapsto \langle a, b \rangle \in \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt, wenn gilt:

$\forall a, b, c \in V \quad \forall t \in \mathbb{R}$:

(S1) $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$ (symmetrisch)

(S2) $\langle a, b+c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$

(S3) $\langle a, tb \rangle = t \langle a, b \rangle$ } Linearität in 2. Komponente
(gilt auch für 1. Komp. wegen S1)

(S4) $\langle a, a \rangle \geq 0, \quad \langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0_v$ positive Definitheit

Beispiele:

a) Standard skalarprodukt im \mathbb{R}^n

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \vec{a}^T \cdot \vec{b}$$

b) $V = C^0([0,1], \mathbb{R}) = \{ f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig auf } [0,1] \}$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

Eigenschaften leicht nachzuprüfen

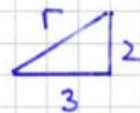
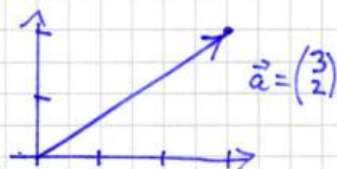
(2) Norm (Betrag / Länge) von $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ($a \in V$)

$$\|\vec{a}\| := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

Bemerkung

$\|\vec{a}\|$ heißt auch euklidische Norm von \vec{a}

Bsp: ($n=2$)



Pythagoras: $r^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow r = \sqrt{13} = \|\vec{a}\|$

Eigenschaften

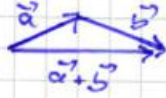
$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}:$$

$$(N1) \quad \|\vec{a}\| \geq 0, \quad \|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \quad (\text{positive Definitheit})$$

$$(N2) \quad \|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$$

$$\text{Bew: } \|\lambda \vec{a}\| = \sqrt{\langle \lambda \vec{a}, \lambda \vec{a} \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$$

$$(N3) \quad \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$



Jede Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit obigen Eigenschaften heißt Norm.

Anderer Beispiele für $V = \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{a}\|_1 := |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \quad \text{Betragssummennorm}$$

$$\|\vec{a}\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |a_i| \quad \text{Maximum norm}$$

Für die aus dem Skalarprodukt abgeleitete Norm gilt zusätzlich:

{Cauchy - Schwarzsche Ungleichung (CSU)}

$$(N4) \quad \text{Cauchy - Schwarzsche Ungleichung (CSU)}$$

$$-\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

$$\text{bzw. } |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

$$\text{Gleichheit gilt für } \vec{b} = \alpha \vec{a} \in [\vec{a}]$$

Beweis

Für $\vec{b} = \vec{0}$ trivial also sei $\vec{b} \neq \vec{0}$

$$0 \leq \langle \vec{a} - t\vec{b}, \vec{a} - t\vec{b} \rangle \quad \text{für beliebiges } t \quad (S4)$$

$$0 \leq \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2t \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + t^2 \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \quad (S2) (S3)$$

$$0 \leq \|\vec{a}\|^2 - 2 \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}{\|\vec{b}\|^2} + \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}{\|\vec{b}\|^2} \quad t := \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|^2} = \frac{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{b}\|^2}$$

$$\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}{\|\vec{b}\|^2} \leq \|\vec{a}\|^2$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \leq \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2$$

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

$$\text{Gleichheit, falls } \vec{a} - t\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \in [\vec{b}]$$

$$\vec{b} \in [\vec{a}]$$

(3) Einheitsvektoren

Geg: $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ $\vec{a} \neq \vec{0}$

Ges: Einheitsvektor \vec{a}^0 in Richtung \vec{a} , d.h. $\vec{a}^0 = \lambda \vec{a}$, $\lambda > 0$, $\|\vec{a}^0\| = 1$

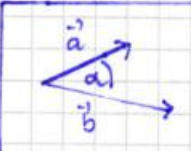


$$1 = \|\vec{a}^0\| = \|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\| \stackrel{\lambda > 0}{=} \lambda \|\vec{a}\| \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\|\vec{a}\|}$$

\Rightarrow Lsg: $\boxed{\vec{a}^0 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}}$

Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow \vec{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(4) Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$


$$\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \text{ mit } 0 \leq \alpha \leq \pi$$
$$\cos \alpha := \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

(W1) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$

(W2) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \Leftrightarrow \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

(5) Orthogonalität

$\vec{a} \perp \vec{b}$ (\vec{a} orthogonal zu \vec{b}) $\Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

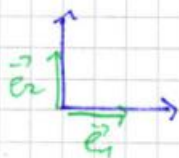
a) $\vec{0} \perp \vec{x} \forall \vec{x}$ aber $\angle(\vec{0}, \vec{x})$ nicht definiert

b) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

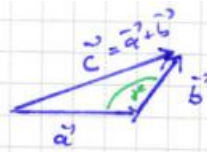
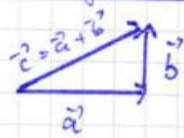
c) $\vec{a} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Bsp: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$

$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$



(6) Pythagoras / Kosinussatz



$$\varphi = \pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\cos \varphi = -\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\|\vec{c}\|^2 = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$

Sonst $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$$

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Satz des Pythagoras

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi$$

Kosinussatz

5.5.2 Abstände

(I) Abstand Punkt - Punkt: $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &:= \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| && \text{Abstand von } \vec{r}_1 \text{ und } \vec{r}_2 \\ d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \end{aligned}$$

$$(D1) \quad d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \geq 0, \quad d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0 \Leftrightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}_2 \quad (\text{pos. def.})$$

$$(D2) \quad d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = d(\vec{r}_2, \vec{r}_1) \quad (\text{symmetrisch})$$

$$\text{Bew: } d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \underset{(Def)}{=} \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = \|-(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\| \underset{(V2)}{=} |-1| \cdot \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| \underset{(Def)}{=} d(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

$$(D3) \quad d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \leq d(\vec{r}_1, \vec{r}) + d(\vec{r}, \vec{r}_2) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = \|(\vec{r}_1 - \vec{r}) + (\vec{r} - \vec{r}_2)\| \\ &\underset{(V3)}{\leq} \|\vec{r}_1 - \vec{r}\| + \|\vec{r} - \vec{r}_2\| = d(\vec{r}_1, \vec{r}) + d(\vec{r}, \vec{r}_2) \end{aligned}$$

Bemerkungen

- 1) Sei M Menge. Jede Fkt $d: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ welche symmetrisch, positiv definit ist und die Ds ungl. erfüllt heißt Metrik auf M
- 2) Ist V ein VR mit Norm $\|\cdot\|$ so ist $d: V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf V
- 3) Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle \rightarrow$ passende Norm \rightarrow passende Metrik

(II) Abstand Punkt - affin UR

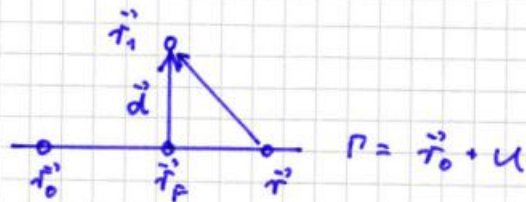
Gegeben

- aff UR $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$
- Punkt $\vec{r}_1 \in \mathbb{R}^n$

Gesucht

- $d(\vec{r}_1, \Gamma) := \min \{ d(\vec{r}_1, \vec{r}) \mid \vec{r} \in \Gamma \}$ Abstand von \vec{r}_1 zu Γ

Lösung



$$d^2(\vec{r}_1, \vec{r}) = d^2(\vec{r}_1, \vec{r}_p) + d^2(\vec{r}_p, \vec{r})$$

$$\Rightarrow d(\vec{r}_1, \vec{r}) \geq d(\vec{r}_1, \vec{r}_p)$$

Bestimmen $\vec{r}_p \in \Gamma$ mit $\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_p \perp U$ (d.h. $\vec{d} \perp \vec{x}$ f. alle $\vec{x} \in U$)

Dann ist $d(\vec{r}_1, \Gamma) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_p) = \|\vec{d}\|$

Bezeichnung

- \vec{r}_p heißt Fußpunkt des Lotes von \vec{r}_1 auf Γ
- $\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_p$ heißt Lotvektor von \vec{r}_1 auf Γ

Bestimmung von \vec{r}_p

(1) Parameterdarstellung von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ bestimmen

- Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d\}$ von U wählen
- $U = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d]$ $d = \dim(U)$
- $\vec{r} \in \Gamma \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x}$ mit $\vec{x} \in U$
 $\Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 + \dots + t_d \vec{a}_d$ $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$
- $A := (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d)$ $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix}$ $A\vec{t} = t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_d \vec{a}_d$
- $\vec{r} \in \Gamma \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + A\vec{t}$ mit $\vec{t} \in \mathbb{R}^d$

(2) Orthogonales Komplement U^\perp von U bestimmen

Def:

$$\vec{x} \perp U \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{a} \quad \forall \vec{a} \in U$$

$$U^\perp := \{ \vec{x} \mid \vec{x} \perp U \} \quad \text{orthogonales Komplement von } U$$

Kriterium

$$\vec{x} \perp \vec{a}_1, \dots, \vec{x} \perp \vec{a}_d \Leftrightarrow \vec{x} \perp t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_d \vec{a}_d \quad \forall t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$$

Beweis

$$(\Leftarrow) \text{ trivial } t_i = 0 \text{ bzw } 1$$

$$(\Rightarrow) \langle \vec{x}, t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_d \vec{a}_d \rangle = t_1 \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{a}_1 \rangle}_{\substack{0 \\ \text{da } \vec{x} \perp \vec{a}_1}} + \dots + t_d \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{a}_d \rangle}_{\substack{0 \\ \text{da } \vec{x} \perp \vec{a}_d}} = 0$$

Also gilt für $U = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d]$

$$\vec{x} \in U^\perp \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{a}_1, \dots, \vec{x} \perp \vec{a}_d$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle = \dots = \langle \vec{a}_d, \vec{x} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}_1^T \vec{x} = \vec{a}_2^T \vec{x} = \dots = \vec{a}_d^T \vec{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vdots \\ \vec{a}_d^T \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^T \vec{x} = \vec{0} \quad A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d)$$

(3) Parameterfreie Darstellung von $\Gamma' = r_1 + U^\perp$ bestimmen

$$\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp \text{ aff UR durch } \vec{r}_1 \text{ der } \Gamma = r_0 + U \text{ senkrecht schneidet}$$

$$\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp \stackrel{(2)}{=} \vec{r}_1 + \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A^T \vec{x} = \vec{0} \} = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid A^T \vec{r} = \vec{b} \} \quad \vec{b} = A^T \vec{r}_1$$

↑
Hauptsatz über LGS

(4) Dann ist \vec{r}_F Schnittpunkt von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ und $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp$

$$I \cdot \vec{r}_P \in \Gamma \Leftrightarrow \vec{r}_P = \vec{r}_0 + A \vec{t} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}^d$$

$$II \cdot \vec{r}_P \in \Gamma' \Leftrightarrow A^T \vec{r}_P = \vec{b} = A^T \vec{r}_n$$

$$I \text{ in } II \Rightarrow A^T (\vec{r}_0 + A \vec{t}) = A^T \vec{r}_n$$

$$A^T \vec{r}_0 + A^T A \vec{t} = A^T \vec{r}_n$$

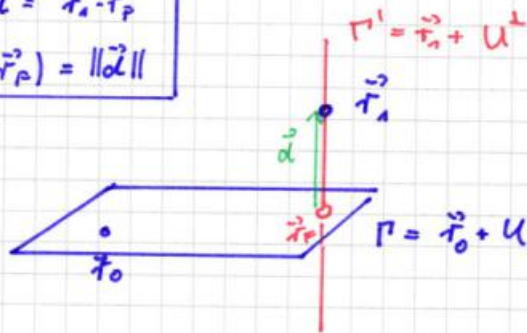
$$A^T A \vec{t} = A^T (\vec{r}_n - \vec{r}_0)$$

$A^T A$ ist quadratisch und invertierbar

$$\begin{aligned} \vec{t} &= (A^T A)^{-1} A^T (\vec{r}_n - \vec{r}_0) \\ \vec{r}_P &= \vec{r}_0 + A \vec{t} \quad \vec{d} = \vec{r}_n - \vec{r}_P \\ d(\vec{r}_n, \Gamma) &= d(\vec{r}_n, \vec{r}_P) = \|\vec{d}\| \end{aligned}$$

graphische

Veranschaulichung



Beispiel

Geg:

- Punkt $\vec{r}_n = (0, 1, 2, 5)^T \in \mathbb{R}^4$
- aff UR $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ mit $U = [\vec{a}, \vec{b}]$ $\vec{r}_0 = \vec{0}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ges:

- $d(\vec{r}_n, \Gamma)$: Abstand von \vec{r}_n und Γ
- \vec{r}_P : Fußpunkt des Lotes von \vec{r}_n auf Γ

(1) Parameterdarstellung von Γ

- $\vec{r} \in \Gamma \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + s \vec{a} + t \vec{b} = \vec{r}_0 + (\vec{a}, \vec{b}) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \vec{r}_0 + A \vec{t}$
- $A = (\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\vec{t} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ $\vec{r}_0 = \vec{0}$

(2) orthogonales Komplement $U^\perp = \{\vec{x} | \vec{x} \perp U\}$

- $U = [\vec{a}, \vec{b}] = \{A \vec{t} | \vec{t} \in \mathbb{R}^2\}$

- $\vec{x} \perp U \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{a} \text{ und } \vec{x} \perp \vec{b}$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{a}^T \\ \vec{b}^T \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^T \vec{x} = \vec{0}$$

- $U^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 | A^T \vec{x} = \vec{0}\}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(3) Parameterfreie Darstellung von $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp$

$$\cdot \Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp = \vec{r}_1 + \{ \vec{x} \mid A^T \vec{x} = \vec{0} \} = \{ \vec{r} \mid A^T \vec{r} = \vec{b} \}, \quad \vec{b} = A^T \vec{r}_1$$

↑
Hauptsatz über LGS

(4) \vec{r}_F ist Schnittpunkt von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ und $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp$

$$\begin{aligned} \cdot \vec{r}_F \in \Gamma &\Leftrightarrow \vec{r}_F = \vec{r}_0 + A \vec{t} \\ \cdot \vec{r}_F \in \Gamma' &\Leftrightarrow A^T \vec{r}_F = A^T \vec{r}_1 \\ \Rightarrow A^T (\vec{r}_0 + A \vec{t}) &= A^T \vec{r}_1 \\ A^T \vec{r}_0 + A^T A \vec{t} &= A^T \vec{r}_1 \\ A^T A \vec{t} &= A^T (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \\ A^T A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{pmatrix} \\ A^T (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} \\ \cdot \vec{r}_F = \vec{r}_0 + A \vec{t} &= \vec{0} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 31 \\ 42 \end{pmatrix} \\ \cdot d(\vec{r}_1, \Gamma) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_F) &= \|\vec{r}_1 - \vec{r}_F\| = \left\| \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{150} \end{aligned}$$

Bemerkung

Ist $U = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]$ lin UR des \mathbb{R}^n und $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ so gilt

(1) $\dim(U) = \text{rg}(A)$

(2) $U^\perp = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A^T \vec{x} = \vec{0} \}$

(3) $\dim(U^\perp) = n - \text{rg}(A^T) = n - \text{rg}(A) = n - \dim(U)$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(U) + \dim(U^\perp) = n}$$

5.5.3 Hessesche Form einer Hyperebene

Gegeben Sei

- $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ Hyperebene im \mathbb{R}^n , also $\dim(\Gamma) = \dim(U) = n-1$

Dann gilt

- $\dim(U^\perp) = n - \dim(U) = 1$ also $U^\perp = [\vec{n}]$ für ein $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$



- $\vec{r} \in \Gamma = \vec{r}_0 + U \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x}, \vec{x} \in U \quad U^\perp = [\vec{n}] : \vec{x} \perp \vec{n}$
 $\Leftrightarrow \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{r}_0 + \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle + \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle}_0 = \langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle$

Erhalten äquivalente Darstellung für Γ

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{x} \mid \vec{x} \in U \} & U^\perp &= [\vec{n}], \quad U = [\vec{n}]^\perp \\ \Gamma &= \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = p \} & p &= \langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle \end{aligned}$$

Darstellung von Γ durch Gleichung

$$\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = p \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = p \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

heißt Hessesche Form von Γ und \vec{n} heißt Normalenvektor von Γ ($\vec{n} \perp U$)

Bemerkung

$t\vec{n} \quad t \neq 0$ ist dann ebenfalls Normalenvektor von Γ
es gilt $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = p \Leftrightarrow \langle \vec{r}, t\vec{n} \rangle = tp$

Beispiel

Hyperebene im \mathbb{R}^3

Geg:

$$\begin{aligned} \bullet \Gamma &= \vec{r}_0 + [\vec{a}, \vec{b}] \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \bullet \vec{r}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ges:

- Hessesche Form von Γ
- $d(\vec{r}_1, \Gamma)$ sowie Lotfußpunkt \vec{r}_F von \vec{r}_1 auf Γ

Lösung

(1) $U = [\vec{a}, \vec{b}] = \{A \cdot \vec{t} \mid \vec{t} \in \mathbb{R}^2\}$ $A = (\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $U^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A^T \vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$\Rightarrow U^\perp = \{\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\} = [\vec{u}]$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ NV von U

(3) Hessesche Form von $\Gamma = \vec{r}_0 + U$

$p = \langle \vec{r}_0, \vec{u} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 5$

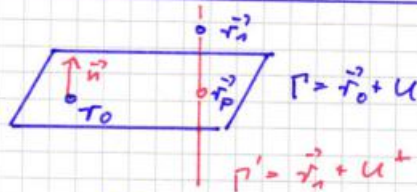
$P = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{r}, \vec{u} \rangle = p\}$

$\Gamma = \{\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 7x - 3y + z = 5\}$

(4) $\Gamma' = \vec{r}_1 + U^\perp = \vec{r}_1 + [\vec{u}] = \{\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{u}, t \in \mathbb{R}\}$

Gerade durch $\vec{r}_1 \perp$ zu P

(5) \vec{r}_F ist Schnittpunkt von Γ und Γ'



• $\vec{r}_F \in \Gamma \Rightarrow \langle \vec{r}_F, \vec{u} \rangle = p$

• $\vec{r}_F \in \Gamma' \Rightarrow \vec{r}_F = \vec{r}_1 + t\vec{u}$

Einsetzen: $\langle \vec{r}_1 + t\vec{u}, \vec{u} \rangle = p$

$\langle \vec{r}_1, \vec{u} \rangle + t \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = p$

$\Rightarrow t = \frac{p - \langle \vec{r}_1, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \frac{\langle \vec{r}_0, \vec{u} \rangle - \langle \vec{r}_1, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \frac{\langle \vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \frac{1}{59}$

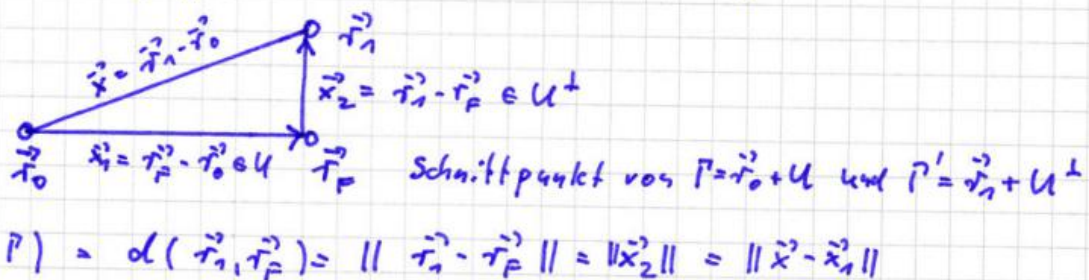
$\Rightarrow \vec{r}_F = \vec{r}_1 + t\vec{u} = \vec{r}_1 + \frac{1}{59}\vec{u} = \frac{1}{59} \begin{pmatrix} 119 \\ 59 \\ 118 \end{pmatrix}$

$d(\vec{r}_1, \Gamma) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_F) = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_F\| = \|\vec{r}_F - \vec{r}_1\| = \|t\vec{u}\| = |t| \cdot \|\vec{u}\| = \frac{1}{59} \sqrt{59}$

allgemein: $d(\vec{r}_1, \Gamma) = |t| \cdot \|\vec{u}\| = \frac{|\langle \vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}$

5.5.4 Orthogonale Projektion, Orthonormalbasis

Abstand $d(\vec{r}_1, \vec{P})$ mit $\vec{P} = \vec{r}_0 + U$ $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$



(1) Orthogonale Projektion

Gegeben:
 • $U \subseteq \mathbb{R}^n$ lin. UR
 • $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ Vektor

Gesucht:
 • Zerlegung von \vec{x} in Summe der Form

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \quad \text{mit } \vec{x}_1 \in U \quad \vec{x}_2 \in U^\perp$$

Bezeichnung:
 • $\vec{x}_1 = \text{proj}(\vec{x}; U)$ heißt orthogonale Projektion von \vec{x} auf U
 • $\vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{x}_1$ heißt orthogonale Komponente von \vec{x} bzgl. U

(2) Orthonormalsystem, Orthonormalbasis

Sei $M = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$

Definition

- M heißt Orthonormalsystem (ONS), falls $\vec{b}_i \perp \vec{b}_j$ für $i \neq j$ und $\|\vec{b}_i\| = 1$ für alle i ist.
- M heißt Orthonormalbasis (ONB) von U , falls M ein ONS und Basis von U ist.

Kriterium

$M = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ ist ONS $\Leftrightarrow \langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$
 $(1 = \langle \vec{b}_i, \vec{b}_i \rangle = \|\vec{b}_i\|^2 \Leftrightarrow \|\vec{b}_i\| = 1)$

(3) Eigenschaften eines ONS

Sei $M = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ ein ONS. Dann gilt

- (a) Ist $\vec{x} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_m \vec{b}_m$ LK der Vektoren aus M
so ist $\alpha_i = \langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle \quad \forall i$
- (b) M ist linear unabhängig

Beweis

(a) $\langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle = \langle \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_m \vec{b}_m, \vec{b}_i \rangle$
 $= \alpha_1 \underbrace{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_i \rangle}_0 + \dots + \alpha_i \underbrace{\langle \vec{b}_i, \vec{b}_i \rangle}_1 + \dots + \alpha_m \underbrace{\langle \vec{b}_m, \vec{b}_i \rangle}_0$
 $= \alpha_i$

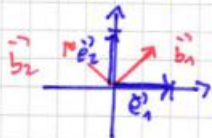
- (b) Die Gleichung $\vec{0} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_m \vec{b}_m$ hat wegen
(a) nur die Lösung $\alpha_i = \langle \vec{0}, \vec{b}_i \rangle = 0 \quad \forall i$
 $\rightarrow M$ ist linear unabhängig

Folgerung

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein lin. UR mit $\dim(U) = m$ und ist
 $M = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ ein ONS mit $M \subseteq U$, so ist M ONB von U

Bsp1 $U = \mathbb{R}^2$

- (a) $M = \{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ ist ONS und somit ONB von \mathbb{R}^2
- (b) $M = \{ \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ ist ONS und somit ONB von \mathbb{R}^2



Bemerkung

Sämtliche obige Bemerkungen gelten analog für beliebige
euklidische Vektorräume ($V_{\mathbb{R}}$ über \mathbb{R} mit Skalarprodukt)

Klassisches Beispiel

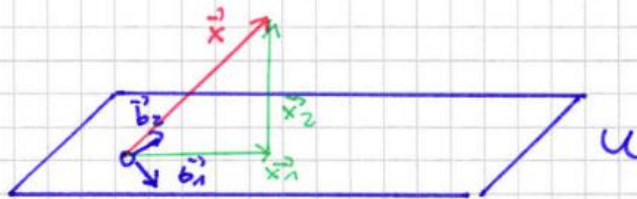
- $V = V_{\mathbb{R}}$ der 2π -periodischen Fkt. $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$
- ONS $M = \{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \}$

(4) Berechnung der orthogonalen Projektion

Ist $M = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ eine ONB des Lin UR $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$\vec{x}_1 = \text{proj}(\vec{x} : U) = \langle \vec{x}, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 + \dots + \langle \vec{x}, \vec{b}_m \rangle \vec{b}_m$$

Beweis



Es sei $\vec{x}_1 = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_m \vec{b}_m$ mit $\alpha_i = \langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle$

Also ist $\vec{x}_1 \in [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m] = U$. Setzen $\vec{x}_2 := \vec{x} - \vec{x}_1$

Um die Projektionseigenschaft nachzuweisen bleibt z.z. $\vec{x}_2 \in U^\perp$

Aus (3) a) folgt $\alpha_i = \langle \vec{x}_1, \vec{b}_i \rangle$ für $i = 1, \dots, m$. Somit gilt:

$$\langle \vec{x}_2, \vec{b}_i \rangle = \langle \vec{x} - \vec{x}_1, \vec{b}_i \rangle = \langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle - \langle \vec{x}_1, \vec{b}_i \rangle = \alpha_i - \alpha_i = 0$$

also $\vec{x}_2 \perp \vec{b}_i$ für $i = 1, \dots, m$. Dann ist $\vec{x}_2 \perp [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m] = U \Rightarrow \vec{x}_2 \in U^\perp$

■

(5) Gram - Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

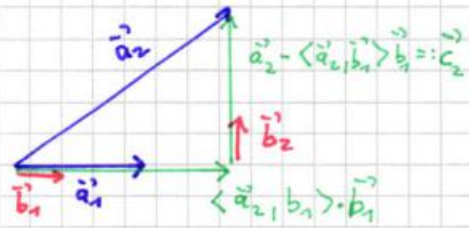
Eingabe: Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$ des Lin UR $U \subseteq \mathbb{R}^n$

Ausgabe: ONB $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$

Berechnung:

$$\vec{b}_1 := \frac{1}{\|\vec{a}_1\|} \cdot \vec{a}_1$$

$$\vec{c}_2 := \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle \cdot \vec{b}_1, \quad \vec{b}_2 := \frac{1}{\|\vec{c}_2\|} \cdot \vec{c}_2$$



allgemein für $1 \leq r \leq m-1$

$$\vec{c}_{r+1} := \vec{a}_{r+1} - \sum_{i=1}^r \langle \vec{a}_{r+1}, \vec{b}_i \rangle \cdot \vec{b}_i \quad (= \vec{a}_{r+1} - \text{proj}(\vec{a}_{r+1}; [\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r]))$$

$$\vec{b}_{r+1} := \frac{1}{\|\vec{c}_{r+1}\|} \cdot \vec{c}_{r+1}$$

Beispiel 1

$$U = [\vec{a}]$$

- ONB : $\vec{b} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}$

- Projektion : $\vec{x}_1 = \text{proj}(\vec{x} : [\vec{a}]) = \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \cdot \vec{b} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \cdot \vec{a}$

Beispiel 2

(a) $U = [\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$

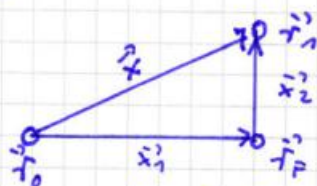
- $\|\vec{a}_1\| = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{1}{2} \cdot \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\vec{c}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\|\vec{c}_2\| = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- ONB von U ist $\{\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

(b) $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ mit $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $d(\vec{r}_1, \Gamma) = ?$



- $\vec{x} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\vec{x}_1 = \text{proj}(\vec{x} : U) = \langle \vec{x}, \vec{b}_1 \rangle \cdot \vec{b}_1 + \langle \vec{x}, \vec{b}_2 \rangle \cdot \vec{b}_2$
 $= 3 \vec{b}_1 + 5\sqrt{2} \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

- $\vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{r}_F = \vec{r}_0 + \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

- $d(\vec{r}_1, \Gamma) = d(\vec{r}_1, \vec{r}_F) = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_F\| = \|\vec{x}_2\| = \sqrt{10}$
 $(= d(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, U))$

Bemerkungen

- 1) Gram-Schmidt funktioniert auch, wenn nur Erzeugendensystem gegeben (0 weglassen)
- 2) $\text{proj}(\vec{r}_1 : \Gamma = \vec{r}_0 + U) = \vec{r}_0 + \text{proj}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0 : U)$
- 3) Verfahren funktioniert in allgemeinen euklidischen Räumen

5.6 Methoden der kleinsten Quadrate

Problemstellung

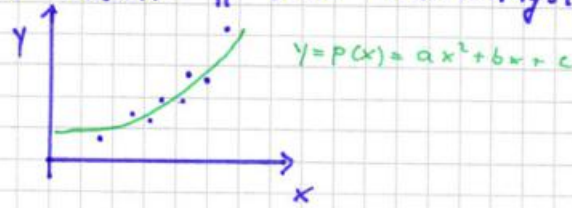
Bremsweg y eines Autos hängt quadratisch von der Geschwindigkeit x ab, d.h.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Messungen ergeben überbestimmtes LGS für die Koeff. a, b, c

$$(x, y) = (100, 50) \rightarrow a \cdot 10000 + b \cdot 100 + c = 50$$

Aufgrund von Messfehlern besitzt das LGS keine Lösung. Suchen daher "beste Näherungslösung"



5.6.1 Näherungslösung eines LGS

Gegeben

LGS der Form $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$ (*) mit $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

Gesucht

Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ für welchen $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$ den kleinsten Wert hat. Man nennt dann \vec{x} eine (im quadratischen Mittel) beste Näherungslösung von (*)

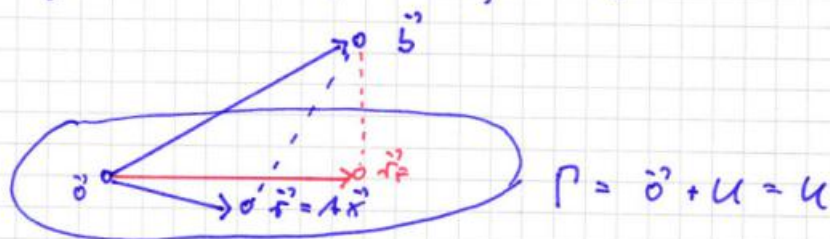
Bemerkung

$$\|A\vec{x} - \vec{b}\| = 0 \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

\Rightarrow Ist das LGS (*) lösbar, so sind die besten Näherungslösungen gerade die Lösungen von (*)

Lösung

- $U = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ ist lin. UR $U \subseteq \mathbb{R}^m$
- $\Gamma = \vec{r}_0 + U$ mit $\vec{r}_0 = \vec{0}$ ist aff. UR von \mathbb{R}^m
 $\Gamma = \{\vec{r} \mid \vec{r} = A\vec{x}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = U$



- Für $\vec{r} = A\vec{x}$ und \vec{b} ist $\|A\vec{x} - \vec{b}\| = \|\vec{r} - \vec{b}\| = d(\vec{r}, \vec{b})$
Wir suchen also den Punkt \vec{r} aus Γ mit $d(\vec{r}, \vec{b}) = d(\Gamma, \vec{b})$
also $\vec{r}_p = \text{Fußpunkt des Lotes von } \vec{b} \text{ auf } \Gamma$.

- $U^\perp = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid A^T \vec{y} = \vec{0}\}$ siehe (5.5.2)
 $\Gamma^\perp = \vec{b} + U^\perp = \{\vec{r} \mid A^T \vec{r} = A^T \vec{b}\}$
- $\vec{r}_p \in \Gamma \cap \Gamma^\perp$
- $\left. \begin{array}{l} \vec{r}_p \in \Gamma \Rightarrow \vec{r}_p = A\vec{x} \\ \vec{r}_p \in \Gamma^\perp \Rightarrow A^T \vec{r}_p = A^T \vec{b} \end{array} \right\} \Rightarrow A^T A\vec{x} = A^T \vec{b}$

Somit gilt

\vec{x} beste Näherungslösung von $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \|A\vec{x} - \vec{b}\| \text{ minimal} \Leftrightarrow A^T A\vec{x} = A^T \vec{b}$

Bemerkung

$A^T A\vec{x} = A^T \vec{b}$ ist stets lösbar

Beispiel

- LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
- $A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{pmatrix}$ $A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix}$
- LGS $A^T A\vec{x} = A^T \vec{b}$ $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 17 \end{pmatrix}$
 $\left(A\vec{x} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 37 \\ 42 \end{pmatrix} \right)$

5.6.2 Ausgleichspolynom

Gegeben

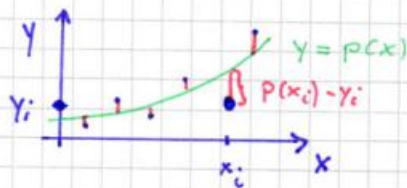
- Messpunkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$
- natürliche Zahl $k \geq 1$

Gesucht

Ein Polynom $p(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ vom Grad $\leq k$, für welches die quadratische Abweichung

$$D = (p(x_1) - y_1)^2 + \dots + (p(x_n) - y_n)^2$$

den kleinsten Wert hat. Man nennt dann $p(x)$ ein Ausgleichspolynom vom Grad $\leq k$ für die n Messpunkte



Lösung

- Suchen Vektor $\vec{x} = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$ der Koeffizienten

• Es gilt

$$\vec{r} := \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_1^k \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \dots + \alpha_k x_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = A \vec{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^k \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{• Dann gilt } D = (p(x_1) - y_1)^2 + \dots + (p(x_n) - y_n)^2 = \|\vec{r} - \vec{b}\|^2 = \|A\vec{x} - \vec{b}\|^2$$

- Suchen \vec{x} für welches $D = \|A\vec{x} - \vec{b}\|^2$ also auch $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$ minimal ist also beste Näherungslösung für $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{x} \text{ ist Lösung von } \boxed{A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}}$$

Bsp: • $(x_i, y_i) = (0, 0), (1, 1), (3, 2), (4, 5)$ $n = 4$ Punkte

- $k = 1 \Rightarrow$ gesucht Ausgleichsgerade $p(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$

$$\text{• LGS } p(x_i) = \alpha_0 + \alpha_1 x_i = y_i \text{ ergibt } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{• beste Näherungslösung (siehe 4.5.1) } \left. \vec{x} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow p(x) = \frac{11}{10}x - \frac{2}{10}$$

6 Determinanten

6.1 Definition der Determinante

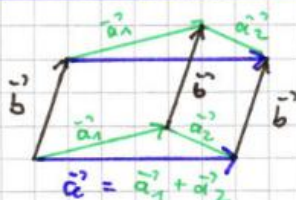
Motivation

Geg: n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ des Spaltenvektorraumes K^n , $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p$, $A := (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in K^{(n,n)}$ Matrix

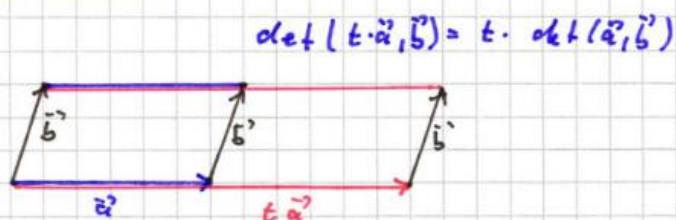
Ges: Eine Funktion $\det: K^{(n,n)} \rightarrow K$, die der Vektormenge (bzw. der Matrix) das verallgemeinerte Volumen des aufgespannten Objekts zuweist. (Im \mathbb{R}^2 Flächeninhalt des Parallelogramms, im \mathbb{R}^3 Volumen des Spats ...)

Gewünschte Eigenschaften

(D1) Linearität in jeder Spalte.



$$\det(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) = \det(\vec{a}_1, \vec{b}) + \det(\vec{a}_2, \vec{b})$$



$$\det(t \cdot \vec{a}, \vec{b}) = t \cdot \det(\vec{a}, \vec{b})$$

Allgemein • $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i + \vec{a}_i', \dots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i', \dots, \vec{a}_n)$
gilt für beliebige i und beliebige $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{a}_i'$

$$\bullet \det(\vec{a}_1, \dots, t \cdot \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) = t \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n)$$

(D2) Enthält A zwei gleiche Spalten, so ist $\det(A) = 0$

Anschauung klar \implies Fläche 0

(D3) Normierung: $\det(E) = 1$



{Leibnitz - Formel}

Satz (ohne Beweis)

a) Es sei K ein beliebiger Körper. Dann gibt es genau eine Funktion $\det: K^{(n,n)} \rightarrow K$ welche die Eigenschaften (D1), (D2), (D3) besitzt. Die Funktion wird Determinante genannt.

b) Leibniz-Formel:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

Bemerkungen

• S_n = Menge der bijektiven Abbildungen $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ (Permutationen)

• Vorzeichen einer Permutation $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{Anzahl der Kreuzungen}}$

Kreuzung: (i, j) mit $i < j$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^6 = 1$$

Spezialfälle der Leibniz-Formel

$$n=2 \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - c \cdot b$$

$n=3$ (Sarrus-Regel)

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \underbrace{aei}_{+} + \underbrace{bfg}_{+} + \underbrace{cdh}_{+} - \underbrace{gec}_{-} - \underbrace{hfa}_{-} - \underbrace{idb}_{-}$$

Für größere n ist Leibniz-Regel Mist ($n!$ Summanden)

Es gibt keine Verallgemeinerung der Sarrus-Regel für $n > 3$

!!!

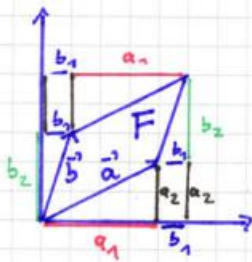
Folgerung aus der Leibniz-Formel

$$(D4) \quad \det(A) = \det(A^T)$$

\Rightarrow Die Regeln (D1) (D2) gelten in analoger Form für Zeilen statt für Spalten.

Beispiele

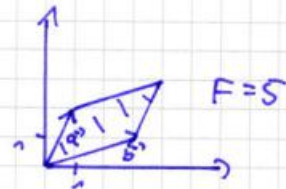
①



$$\begin{aligned}
 F &= (a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) \\
 &\quad - a_1 a_2 - b_1 b_2 - 2b_1 a_2 \\
 &= a_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2 \\
 &\quad - a_1 a_2 - 2b_1 a_2 - b_1 b_2 \\
 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

② $\det(\vec{a}, \vec{b})$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5$$



Determinante ist Vorzeichen behaftet

Flächeninhalt (Volumen) = Betrag der Determinante

③ $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = -3$

6.2 Eigenschaften der Determinante

(D5)

Hat A Nullzeile (oder Spalte) so ist $\det(A) = 0$
folgt aus (D1) mit $t = 0$

(D6) Graßoperationen und $\det(A)$

(i) Zeile mit Konstante multiplizieren

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha \cdot a \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{Regel (D1) für Zeilen}$$

(ii) Vielfaches einer Zeile zu anderer Zeile addieren

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ b+da \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ \vdots \end{pmatrix} + \underbrace{d \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ a \\ \vdots \end{pmatrix}}_0 = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ \vdots \end{pmatrix} + d \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ a \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ b+da \\ \vdots \end{pmatrix}$$

\Rightarrow keine Änderung der Determinante!

(iii) Zeilentausch

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ b \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ b+a \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \\ b+a \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ -b \\ \vdots \\ a \\ \vdots \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} \vdots \\ b \\ \vdots \\ a \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Vorzeichenwechsel!

(D7) Dreiecksmatrizen

Sei D eine Matrix aus $K^{(n,n)}$. Falls gilt:

$d_{ij} = 0$ für $j < i$, so heißt D obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$d_{ij} = 0$ für $j > i$, so heißt D untere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ist D eine obere oder untere Dreiecksmatrix, so gilt

$$\det(D) = d_{11} \cdot d_{22} \cdot \dots \cdot d_{nn}$$

Begründung: $\det(\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_n) \xrightarrow[\text{Typ ii}]{\text{Gaußop}} \det \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & d_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_{nn} \end{pmatrix} \stackrel{(D1)}{=} d_{11} \cdot \dots \cdot d_{nn} \cdot \underbrace{\det E}_1$

Kann genutzt werden:

Bsp:

$$\begin{array}{l} A \quad \begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & \\ 4 & 5 & 6 & \\ 7 & 8 & 10 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow -7 \\ \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} \rightarrow -7 \end{array} \\ A' \quad \begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & \\ 0 & -3 & -6 & \\ 0 & -6 & -11 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow -7 \\ \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} \rightarrow -7 \end{array} \\ D \quad \begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & \\ 0 & -3 & -6 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \end{array}$$

$$\det(A) = \det(A') = \det(D) = 1 \cdot (-3) \cdot 1 = -3$$

Gauß - Jordan - Verfahren zur Bestimmung von $\det(A)$

Überführen A durch Gaußoperationen vom Typ
 (ii) λ -Faches einer Zeile zu anderer Zeile addieren
 und (iii) Zeilentausch in Dreiecksmatrix $D = (d_{ij})$
 Dann ist $\det(A) = (-1)^m \cdot \det D = (-1)^m \cdot d_{11} \cdot \dots \cdot d_{nn}$
 $m = \text{Anzahl der Zeilentauschs}$

Beispiele

$$1) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 4 \cdot 2 = -1$$

$$2) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} = ?$$

$$\text{Sarrus: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 7 \cdot 9 \\ - 3 \cdot 1 \cdot 5 - 9 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 7 \cdot 2$$

$$= 3 + 24 + 315 - 15 - 36 - 42 = 249$$

$$\text{Gauß: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 7 \\ \cdot (-3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -13 & -31 \\ 0 & 3 & -12 \end{vmatrix} \cdot 2 = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & -13 & 31 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -13 & 31 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 13 \\ + \end{matrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -83 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-83) = 249$$

(D8) Invertierbarkeit

Folgende Aussagen sind äquivalent für $A \in K^{(n,n)}$

- (i) A ist invertierbar
- (ii) Die Spalten von A sind linear unabhängig
- (iii) Die Zeilen von A sind linear unabhängig
- (iv) $\text{rg}(A) = n$
- (v) $\det(A) \neq 0$

Folgt aus (D7) und (D6)

(D9) Produktregeln

Seien $A, B \in K^{(n,n)}$ $\alpha \in K$. Dann gilt

a) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

b) $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det(A)$

c) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ falls A invertierbar

Bew: a) Für $\det(B) \neq 0$ zeigt man $\frac{\det(A \cdot B)}{\det(B)} =: d(A)$ erfüllt D1-D3

b) folgt aus (D1)

c) $1 = \det(E) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

(6.3) Adjunkten / Laplacescher Entwicklungssatz

Sei $A \in K^{(n,n)}$ eine quadratische Matrix. Dann bezeichnet $A_{i,j} \in K^{(n-1,n-1)}$, die aus A durch Streichen der Zeile i und der Spalte j entsteht.

$$d_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{i,j})$$

$A_{i,j}$ heißt Minor und d_{ij} Adjunkte von A zum Element a_{ij} .

Entwicklungssatz

(1) Entwicklung nach der i -ten Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot d_{ij} = a_{i1} d_{i1} + \dots + a_{in} d_{in} \quad \text{für beliebiges } i$$

(2) Entwicklung nach der j -ten Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} d_{ij} = a_{1j} d_{1j} + \dots + a_{nj} d_{nj} \quad \text{für beliebiges } j$$

Inversenformel

Ist $\det(A) \neq 0$ so gilt $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A_{\text{adj}}^T$ mit $A_{\text{adj}} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$

Folgt aus Leibniz-Formel

Bsp1: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

• Vorzeichen $(-1)^{i+j} = \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$ (Schachbrettmuster)

• Adjunkten

$$d_{11} = + \det \begin{pmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & d \end{pmatrix} = d$$

$$d_{12} = - \det \begin{pmatrix} a & \cancel{b} \\ c & d \end{pmatrix} = -c$$

$$d_{21} = - \det \begin{pmatrix} \cancel{a} & b \\ \cancel{c} & d \end{pmatrix} = -b$$

$$d_{22} = + \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & \cancel{d} \end{pmatrix} = a$$

$$A_{\text{adj}} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

• Entwicklung nach Spalte 1 $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a d_{11} + c d_{12}$
 $= ad - cb$

• Inverse Matrix, falls $\det(A) = ad - cb \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{\text{adj}}^T = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Bsp2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vorzeichen } (-1)^{i+j} \cong \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach Spalte 2

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \\ &= -2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -2(36 - 42) + 5(9 - 21) - 8(6 - 12) \\ &= 12 + 60 + 48 = 0 \end{aligned}$$

Entwicklung nach Zeile 3

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= +7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 7(12 - 15) - 8(6 - 12) + 9(5 - 8) \\ &= -21 + 48 - 27 = 0 \end{aligned}$$

$\det(A) = 0$ (Zeilen linear abhängig, $3.Z = -1.Z + 2.Z$)

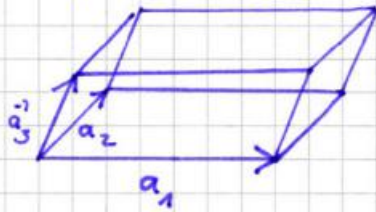
Bemerkung

- Entwicklungssatz liefert rekursive Berechnungsmöglichkeit für die Determinante
- nützlich, wenn in einer Zeile oder Spalte viele Nullen
- sonst Gaußverfahren besser

6.4 Anwendung der Determinante

(I) Volumen im \mathbb{R}^3

Für das Volumen des Parallelepipeds mit den Seitenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt $V = |\det(A)|$ mit $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$



analog für $n \geq 3$ n -dimensionales Volumen im \mathbb{R}^n .

(II) Untersuchung linearer Gleichungssysteme

(1) Inhomogenes LGS

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit } A \in K^{(n,n)}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$$

also n Gleichungen in n Unbekannten

1. Fall $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = n$ und $\exists A^{-1}$

\Rightarrow Es gibt genau 1 Lsg. $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

2. Fall $\det A = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \leq n-1 \quad \nexists A^{-1}$

a) $\text{rg}(A) < \text{rg}(A, \vec{b}) \Rightarrow$ keine Lösung

b) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A, \vec{b}) \Rightarrow$ Lösungsmenge Γ mit Dimension $d = n - \text{rg}(A) \geq 1$ also
unendlich viele Lsg. (falls K nicht endlich)

Cramersche Regel

Sei $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in K^{(n,n)}$. Ist $\det(A) \neq 0$, so gilt für die eindeutig bestimmte Lösung $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ von $A\vec{x} = \vec{b}$

$$x_i = \frac{\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n)}{\det(A)}$$

(Ersetze in Zählerdeterminante i -te Spalte durch \vec{b})

Beweis der Regel

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n = \vec{b}$$

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n) &= \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n) \\ &= x_1 \underbrace{\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_1, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n)}_0 + \dots + x_i \underbrace{\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n)}_{\det(A)} + \dots + x_n \underbrace{\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_n, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n)}_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{b}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n)}{\det(A)}$$

■

Beispiel

$$K = \mathbb{C}, n=2$$

$$\begin{pmatrix} i+1 & 5 \\ 4 & i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \det(A) = \begin{vmatrix} i+1 & 5 \\ 4 & i-1 \end{vmatrix} = (i+1)(i-1) - 4 \cdot 5 = -2 - 20 = -22$$

$$\bullet \det(\vec{b}, \vec{a}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & i-1 \end{vmatrix} = 2(i-1) - 2 \cdot 5 = -12 + 2i \Rightarrow x_1 = \frac{-12+2i}{-22} = \frac{6-i}{11}$$

$$\bullet \det(\vec{a}_1, \vec{b}) = \begin{vmatrix} i+1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (i+1) \cdot 2 - 4 \cdot 2 = -6 + 2i \Rightarrow x_2 = \frac{-6+2i}{-22} = \frac{3-i}{11}$$

$$\bullet \text{Lösung } \underline{\underline{\vec{x} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6-i \\ 3-i \end{pmatrix}}}$$

(2) Homogenes LGS

$A\vec{x} = \vec{0}$ mit $A \in K^{(n,n)}$, $\vec{0} \in K^n$ $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$
 Hat stets die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$, d.h. Fall 2 a) entfällt

1. Fall $\det(A) \neq 0$

\Rightarrow Es gibt nur die triviale Lösung $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

2. Fall $\det(A) = 0$

\Rightarrow Es gibt auch nichttriviale Lösungen
 $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $A\vec{x} = \vec{0}$

(III) Vektorprodukt im \mathbb{R}^3

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

heißt Vektorprodukt (Kreuzprodukt) von \vec{a} und \vec{b}

Bemerkung: Die Determinante ist als Merkmegel zu verstehen

Beispiel $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1^+ & 1 & 4 \\ \vec{e}_2^- & 2 & 5 \\ \vec{e}_3^+ & 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_1^+ (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - \vec{e}_2^- (1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + \vec{e}_3^+ (1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) \\ &= -3 \vec{e}_1^+ + 6 \vec{e}_2^- - 3 \vec{e}_3^+ = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{anders: } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln

$$(V1) \quad \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad (\text{Spaltentausch in Determinante})$$

$$(V2) \quad \begin{aligned} & \cdot \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ & \cdot \vec{a} \times (t \cdot \vec{b}) = t \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \cdot \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ & \cdot \vec{a} \times (t \cdot \vec{b}) = t \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned}} \right\} \text{Linearität in Spalte 3}$$

$$\begin{aligned} & \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \\ & \cdot (t \vec{a}) \times \vec{b} = t (\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \\ & \cdot (t \vec{a}) \times \vec{b} = t (\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned}} \right\} \text{Linearität in Spalte 2}$$

$$(V3) \quad \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad (\text{Spatprodukt})$$

$$\text{Volumen} = |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle|$$

Begründung $\cdot \vec{e}_i$ in Formel wird durch c_i ersetzt

$$\Rightarrow \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \det(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

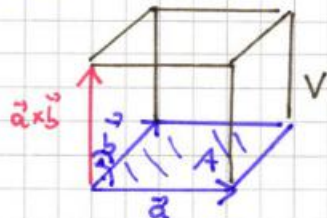
(2 x Spaltentausch)

$$(V4) \quad \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0 \quad \text{also } \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$$

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0 \quad \text{also } \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$

folgt aus (V3) und (D2)

$$(V5) \quad \|\vec{a} \times \vec{b}\| = F(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$$



$A = F(\vec{a}, \vec{b})$ Flächeninhalt des Parallelogramms.

Bew:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle \stackrel{(V3)}{=} \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$$

$$= V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$$

$$= A \cdot h \quad (\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe})$$

$$= F(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

$$\Rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\| = F(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

$$(V6) \quad \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \quad \text{folgt aus (V5)}$$

$$(V7) \quad \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$$

Bew:

$$\cos^2(\angle \vec{a}, \vec{b}) + \sin^2(\angle \vec{a}, \vec{b}) = 1$$

$$\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2} + \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2}{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2} = 1$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 + \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$$

Bemerkung

Bemerkung

Das Vektorprodukt hat viele Anwendungen in der analytischen Geometrie (Normalenvektor, Flächenberechnungen etc.)

7. Lineare Abbildungen und Eigenwerte

7.1 Lineare Abbildungen und Gleichungen

- Seien V, W Vektorräume über K ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$)
- $L: V \rightarrow W$ Abbildung

$$x \rightarrow \boxed{L} \rightarrow y = L(x)$$

Definition

- (a) L heißt lineare Abbildung, falls gilt

$$(LA) \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \forall x, y \in V: \quad L(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y)$$

- (b) Die Gleichung

$$L(x) = b$$

heißt lineare Gleichung in der Unbekannten x , falls L eine lineare Abbildung ist. Die Gleichung heißt homogen, falls $b = 0_W$ und inhomogen falls $0_W \neq b_W$

Bemerkungen

- (1) Die Eigenschaft (LA) ist äquivalent zu

$$(LA1) \quad \forall x, y \in V: \quad L(x+y) = L(x) + L(y)$$

$$(LA2) \quad \forall x \in V \quad \forall \alpha \in K: \quad L(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot L(x)$$

Bew: (LA) mit $\alpha = \beta = 1_K \Rightarrow (LA1)$

(LA) mit $\beta = 0_K \Rightarrow (LA2)$

$$L(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \stackrel{LA1}{=} L(\alpha \cdot x) + L(\beta \cdot y) \stackrel{LA2}{=} \alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y)$$

- (2) Eine lineare Abbildung des Vektorraumes V in den Vektorraum W heißt auch (Vektorraum-)Homomorphismus (operationstreuere Abbildung) (vgl. Homomorphismen von Gruppen, Ringen, Körpern)

Beispiele

a) $V = K^n, W = K^m \quad A \in K^{(m,n)}$
 $f: V \rightarrow W$ mit $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ ist lineare Abbildung, da
 $f(\alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y}) = A(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha \cdot A\vec{x} + \beta \cdot A\vec{y} = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$
 \Rightarrow Das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist eine lineare Gleichung

b) $V = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad W = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
 Die Abbildung $D: V \rightarrow W$ mit $D(f) = f'$ ist linear
 $D(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)' = \alpha \cdot f' + \beta \cdot g' = \alpha \cdot D(f) + \beta \cdot D(g)$

c) Die identische Abbildung $\text{id}_V: V \rightarrow V$ mit $\text{id}_V(x) = x \quad \forall x$
 ist stets linear (trivial)

Bemerkung

Die Menge $L(V, W) := \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ ist linear}\}$
 der linearen Abbildungen ist ein Vektorraum
 (linearer Unterraum von $\text{Abb}(V, W)$), d.h.
 Summe und Vielfache linearer Abbildungen
 sind lineare Abbildungen.

Bsp: • $L: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit
 $L(f) = f' - f$ ist linear
 • analog $L: C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
 $L(f) = f'' - 3f' + 2f$

Satz (Hauptsatz über lineare Abbildungen)

Seien V, W zwei K -VR und $L \in L(V, W)$ eine lineare Abbildung. Weiterhin seien

$$U = \{x \in V \mid L(x) = 0_W\} \quad \text{und}$$

$$\Gamma = \{x \in V \mid L(x) = b\}$$

Dann gilt

(1) U ist linearer Unterraum von V

(2) $\Gamma = \emptyset$ oder, falls $x_s \in \Gamma$, dann ist Γ ein affiner Unterraum von V mit

$$\Gamma = x_s + U$$

↑
eine spezielle Lösung der inhom. GL

← allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

Beweis

- analog zum Beweis des Hauptsatzes über LGS
- Hauptsatz über LGS ist Spezialfall mit $L(\vec{x}) = A\vec{x}$ und $b = \vec{b} \in K^n$

(1) (U1) z.z. $0_V \in U$

$$L(0_V) = L(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot L(0_V) = 0_W$$

$$\Rightarrow 0_V \in U$$

(U2/3) $x, y \in U \quad \alpha, \beta \in K$

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y) = \alpha \cdot 0_W + \beta \cdot 0_W = 0_W$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in U$$

(2) Ist $\Gamma \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_s \in \Gamma$

$$\Gamma = x_s + \{x - x_s \mid x \in \Gamma\}$$

$$\text{Beh: } M = \{x - x_s \mid x \in \Gamma\} = U$$

(\subseteq) Sei $y \in M \Rightarrow y = x - x_s$ für ein $x \in \Gamma$

$$L(y) = L(x - x_s) = L(x) - L(x_s) = b - b = 0_W \Rightarrow y \in U$$

(\supseteq) $y \in U \Rightarrow y = x - x_s$ mit $x = x_s + y$

$$\text{z.z.: } x \in \Gamma$$

$$L(x) = L(x_s + y) = L(x_s) + L(y) = b + 0_W = b \Rightarrow x \in \Gamma$$

■

Beispiel

Ges: Funktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Gleichung $y'(x) - y(x) = 3x^2 - x^3$ erfüllt.

- Lineare Gleichung $L(y) = b$ mit $L(y) = y' - y$, $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $b(x) = 3x^2 - x^3$
- homogene lineare Gleichung $y' - y = 0$ $y' = y$
 $U = \{ y \mid y' = y \}$ $U = \{ y \mid y(x) = c e^x, c \in \mathbb{R} \}$
- eine spezielle Lösung $y_s(x) = x^3$ $y_s' - y_s = 3x^2 - x^3 = b(x)$

\Rightarrow Allgemeine Lösung der Gleichung $y(x) = x^3 + c \cdot e^x$ $c \in \mathbb{R}$

7.2 Lineare Abbildungen $L : K^n \rightarrow K^m$, Matrizendarstellung

Geg:

- $V = K^n, W = K^m$
- $L : K^n \rightarrow K^m$

$$\vec{x} \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow \vec{y} = L(\vec{x})$$

Dann gilt

(1) Ist $L(\vec{x}) = M\vec{x}$ mit $M \in K^{(m,n)}$, so ist L linear (siehe 7.1)

(2) Ist L eine lineare Abbildung, dann gibt es ein $M \in K^{(m,n)}$ mit $L(\vec{x}) = M\vec{x}$

Bew:

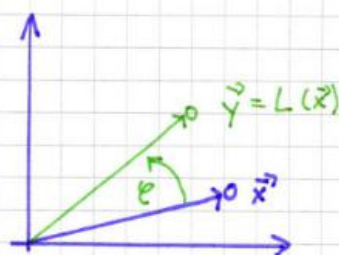
- $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$

$$\begin{aligned} L(\vec{x}) &= L(x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n) \\ &= x_1 \cdot L(\vec{e}_1) + \dots + x_n \cdot L(\vec{e}_n) \quad (L4) \\ &= \left(L(\vec{e}_1), \dots, L(\vec{e}_n) \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= M \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

mit $M = \left(L(\vec{e}_1), \dots, L(\vec{e}_n) \right)$

Bsp 1

Bsp 1 $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Drehung um $\vec{0}$ mit Winkel φ

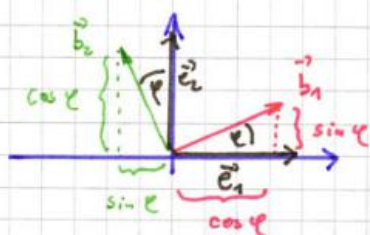


Linearität

$$L(d\vec{x}) = d \cdot L(\vec{x})$$

$$L(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = L(\vec{x}_1) + L(\vec{x}_2) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \vec{y} = L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$$



$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= L(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ \vec{b}_2 &= L(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Drehmatrix } M = \left(L(\vec{e}_1), L(\vec{e}_2) \right) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Bestimmung von M bei Basiswechsel

$$L: K^n \rightarrow K^m \text{ lin. Abb} \Rightarrow L(\vec{x}) = M \vec{x} \quad M = ?$$

M leicht bestimmbar, wenn $L(\vec{e}_i)$ bekannt. Was, wenn andere Bilder bekannt?

geg: • Basis von K^n $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \Rightarrow A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ inv. bare Matrix
• Bilder von \vec{a}_i $L(\vec{a}_i) = \vec{b}_i$

Bestimmung von M

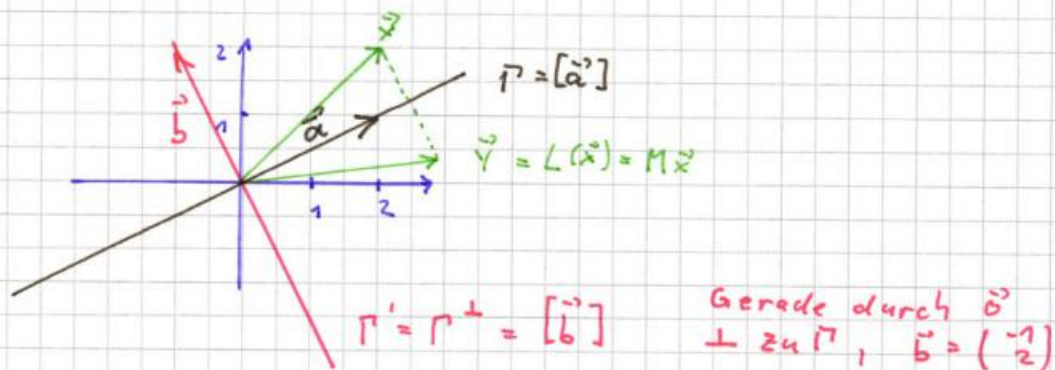
$$L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} \Rightarrow L(\vec{a}_i) = \vec{b}_i \\ \Rightarrow M \cdot \vec{a}_i = \vec{b}_i$$

$$M(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = (M\vec{a}_1, \dots, M\vec{a}_n) = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) \\ \Rightarrow M = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) \cdot (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = (L(\vec{a}_1), \dots, L(\vec{a}_n)) \cdot (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)^{-1}}$$

Beispiel

Beispiel $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Spiegelung an Ursprungsgerechten
 $\Gamma = [\vec{a}]$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\bullet \vec{x} \in \Gamma \Rightarrow L(\vec{x}) = \vec{x} \Rightarrow L(\vec{a}) = \vec{a}$$

$$\bullet \vec{x} \in \Gamma' \Rightarrow L(\vec{x}) = -\vec{x} \Rightarrow L(\vec{b}) = -\vec{b}$$

$$\bullet \{\vec{a}, \vec{b}\} \text{ Basis des } \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow M = (L(\vec{a}), L(\vec{b})) \cdot (\vec{a}, \vec{b})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Komposition linearer Abbildungen / Matrizenmultiplikation

Definition

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt orthogonale Matrix, falls $A^T A = E$

Folgerung aus (2)

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist orthogonale Matrix \Leftrightarrow Spaltenvektoren von A bilden ONS und damit ONB des \mathbb{R}^n

Bsp: Spiegelmatrix $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} : A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \left\| \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = 1$

Eigenschaften orthogonaler Matrizen

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ orthogonal, dann gilt

(01) $A^{-1} = A^T$

(02) A^T und A^{-1} sind ebenfalls orthogonal

(03) $\langle A\vec{x}_1, A\vec{x}_2 \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle \quad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$

(04) $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

(05) $\angle(A\vec{x}_1, A\vec{x}_2) = \angle(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$

(06) $\det(A) = \pm 1$

(07) $A \cdot B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist orthogonal

Beweis

$$(01/02) \quad A \text{ orth.} \Rightarrow A^T A = E \Rightarrow A^T = A^{-1} \Rightarrow (01) \\ \Rightarrow E = A \cdot A^{-1} = A \cdot A^T = (A^T)^T \cdot A^T \Rightarrow A^T \text{ orth.} \Rightarrow (02)$$

$$(03) \quad \langle A\vec{x}_1, A\vec{x}_2 \rangle = (A\vec{x}_1)^T A\vec{x}_2 = \vec{x}_1^T \underbrace{(A^T A)}_E \vec{x}_2 = \vec{x}_1^T \vec{x}_2 = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle$$

$$(04) \quad \|A\vec{x}\| = \sqrt{\langle A\vec{x}, A\vec{x} \rangle} \stackrel{(03)}{=} \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \|\vec{x}\|$$

$$(05) \quad \text{folgt aus (03), (04), da } \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

$$(06) \quad A \text{ orth.} \Rightarrow A^T A = E \Rightarrow 1 = \det(E) = \det(A^T \cdot A) = \det(A^T) \cdot \det(A) \\ \Rightarrow 1 = \det(A) \cdot \det(A) \Rightarrow \det(A) = \pm 1$$

$$(07) \quad (AB)^T \cdot AB = B^T \underbrace{A^T A}_E B = B^T B = E \Rightarrow AB \text{ orth.}$$

Satz: Die Menge $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \mid A^T A = E\}$ der orthogonalen Matrizen bildet eine Gruppe bzgl. der Matrizenmultiplikation.

Bew: Zeigen $O(n)$ ist UG von $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$, da jede orth. Matrix invertierbar ist.

$$(U1) \quad E \in O(n), \text{ da } E^T E = E$$

$$(U2) \quad A, B \in O(n) \Rightarrow A \cdot B \in O(n) \quad (07)$$

$$(U3) \quad A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} \in O(n) \quad (02)$$

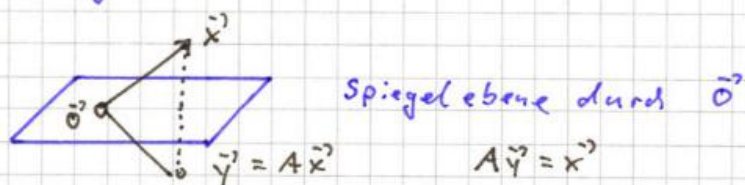
Klassifikation

Klassifikation $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

Die Abbildung $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto A\vec{x} = \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist

(a) Drehung $\Leftrightarrow A$ ist orthogonal und $\det(A) = +1$

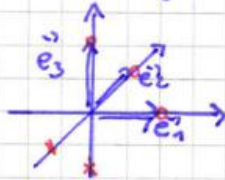
(b) Spiegelung $\Leftrightarrow A$ ist orthogonal und $A^T = A$ ($\Rightarrow A^T A = A A = E$)



(c) Ist A orth. und weder Drehung noch Spiegelung, so ist Abbildung Drehspiegelung. (Drehmatrix \cdot Spiegelmatrix)

Beispiele

Bsp 1 $\vec{y} = A\vec{x}$ Spiegelung an $\Gamma = [\vec{e}_1]$ in \mathbb{R}^3

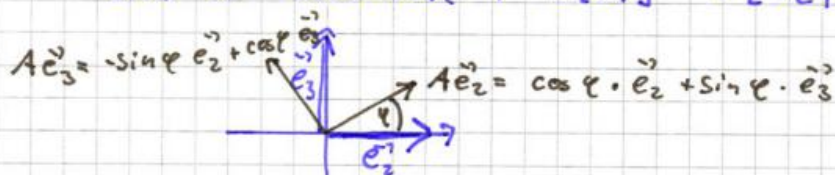


$$A\vec{e}_1 = \vec{e}_1, A\vec{e}_2 = -\vec{e}_2, A\vec{e}_3 = -\vec{e}_3 \Rightarrow A = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = E \Rightarrow A \text{ orthogonal}, \det(A) = +1 \Rightarrow \vec{y} = A\vec{x} \text{ ist Drehung}$$

Drehachse Γ , Drehebene $\Gamma' = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$, Drehwinkel $\varphi = 180^\circ = \pi$

Bsp 2 $\vec{y} = A\vec{x}$ Drehung um $\Gamma = [\vec{e}_1]$ Winkel φ $n=3$
 $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1$ Drehebene $\Gamma' = [\vec{e}_1]^\perp = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$



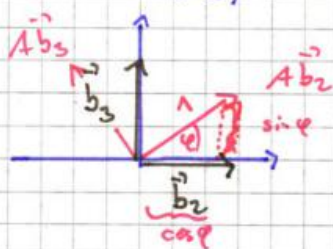
$$A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, A\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Bsp 3 Drehung $\vec{y} = A\vec{x}$ um Ursprungsgerade Γ , Winkel φ

1. Bestimmen Richtungsvektor \vec{b}_1 von Γ mit $\|\vec{b}_1\|=1$ $\Gamma = [\vec{b}_1]$
2. Bestimmen ONB $\{\vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ der Drehebene $\Gamma' = \Gamma^\perp$

$$\Gamma' = [\vec{b}_2, \vec{b}_3] = [\vec{b}_1]^\perp$$

$$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$$



Dann gilt:

$$A\vec{b}_1 = \vec{b}_1$$

$$A\vec{b}_2 = \cos \varphi \cdot \vec{b}_2 + \sin \varphi \cdot \vec{b}_3$$

$$A\vec{b}_3 = -\sin \varphi \cdot \vec{b}_2 + \cos \varphi \cdot \vec{b}_3$$

Matrix B ist orthogonal, da $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ONB $\Rightarrow B^T B = E, B^{-1} = B^T$

Wichtig: Wähle \vec{b}_3 so, dass $\det B = +1$ ($\vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$)

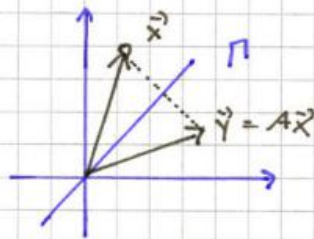
~~208~~

$$\begin{aligned}
\Rightarrow AB &= A(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, A\vec{b}_3) \\
&= (\vec{b}_1, \cos \varphi \vec{b}_2 + \sin \varphi \vec{b}_3, -\sin \varphi \vec{b}_2 + \cos \varphi \vec{b}_3) \\
&= (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\
&= BD \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{A = BDB^T} \quad B = \text{geordnete ONB, 1. Spalte Drehachse} \\
D = \text{Drehmatrix um } \vec{e}_1 \text{ Winkel } \varphi \\
(\text{vgl. später Koordinatentransformation})$$

Bsp 4 $A = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} \quad A^T = A \quad A^T A = E \Rightarrow A \text{ orthogonal}$

$\Rightarrow \vec{y} = A\vec{x}$ ist Spiegelung an Ursprungsebenen im \mathbb{R}^2



$$\vec{x} \in P \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - E)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} - E \right) \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -32 & 8 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

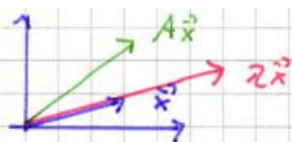
$$\Rightarrow P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$$

Probe: $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ✓

7.4 Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen

(1) Eigenwertgleichung (EWG)

Geg: $A \in K^{(n,n)}$



Ges: Lösungen (λ, \vec{x}) mit $\lambda \in K, \vec{x} \in K^n$ der EWG

$$\boxed{A\vec{x} = \lambda\vec{x}} \quad \text{von } A$$

Für alle $\lambda \in K$ ist $\vec{x} = \vec{0}$ eine (triviale) Lsg der EWG. Ist (λ, \vec{x}) Lösung der EWG mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ so heißt λ Eigenwert (EW) von A und \vec{x} heißt Eigenvektor (EV) von A zum EW λ .

Bsp: Spiegelmatrix $A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$ hat EW $\lambda = 1$ mit zugehörigen EV $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$.

Bemerkung Ist $L: V \rightarrow W$ eine lin. Abb. und gilt für ein $x \in V \setminus \{0_V\}$ und $\lambda \in K$: $L(x) = \lambda \cdot x$ so heißt x ebenfalls Eigenvektor von L zum EW λ .

(2) Bestimmung der EW von $A \in K^{(n,n)}$

$$\boxed{A\vec{x} = \lambda\vec{x}} \quad \text{EWG}$$



$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$$

$$\boxed{(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}}$$

homogenes LGS mit
Parameter $\lambda \in K$

1. Fall $\det(A - \lambda E) \neq 0 \Rightarrow$ nur triviale Lsg $\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \lambda$ kein EW

2. Fall $\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow$ es gibt Lsg $\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda$ ist EW von A

Beispiele

Bsp1 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)} \quad (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = (5-\lambda)(1-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = 3 \quad (\lambda=3 \text{ ist 2-facher EW von } A)$$

Bsp2 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)} \subseteq \mathbb{C}^{(2,2)} \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i$$

$\Rightarrow A$ hat komplexe EW $\lambda_1 = -i, \lambda_2 = i$ aber keine reellen EW

charakteristisches Polynom von $A \in K^{(n,n)}$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

a) $P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0$

ist Polynom vom Grad n (charakteristisches Polynom von A)

mit $b_{n-1}, \dots, b_0 \in K$

b) λ ist EW von $A \Leftrightarrow P(\lambda) = 0$ (Nullstelle)

c) Ist $K = \mathbb{C}$ dann hat A genau n EW (gezählt mit ihren Vielfachheiten als NS von $P(\lambda)$)

d) Ist $K = \mathbb{R}$ dann hat $A \leq n$ reelle EW

(3) EW von $A \in K^{(n,n)}$

Betrachten einen EW $\lambda = \tilde{\lambda} \in K$ von A und die Lösungsmenge der EWG für $\lambda = \tilde{\lambda}$

$$E(A, \tilde{\lambda}) := \{\vec{x} \in K^n \mid (A - \tilde{\lambda}E)\vec{x} = \vec{0}\}$$

Dann gilt

- a) \vec{x} ist EV von A zum EW $\lambda = \tilde{\lambda} \Leftrightarrow \vec{x} \in E(A, \tilde{\lambda}), \vec{x} \neq \vec{0}$
b) $E(A, \tilde{\lambda})$ ist lin. UR von K^n (Eigenraum von A zum EW $\tilde{\lambda}$)



Lokal ist die Abbildung $\vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x}$ auf $E(A, \tilde{\lambda})$ eine Dilatation (Stauchung/Streckung) um Faktor $\tilde{\lambda}$.

- c) Ist $\lambda = \tilde{\lambda}$ k -facher EV (k -fache MS von $P(\lambda)$)

So gilt:

$$1 \leq \dim(E(A, \tilde{\lambda})) \leq k$$

Man nennt k die algebraische und $\dim(E(A, \tilde{\lambda}))$ die geometrische Vielfachheit des EW $\lambda = \tilde{\lambda}$

Beispiel

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \mathbb{R}$$

(a) charakteristische Matrix

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

(b) charakteristisches Polynom

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9$$

(c) Nullstellen / Eigenwerte

$$\lambda = 3$$

(d) $(A - \lambda E) \vec{x} = \vec{0}$ für $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Lösung } \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E(A, \lambda=3) = \left\{ \vec{x} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\dim(E(A, \lambda=3)) = 1$$

e) Der EW $\lambda = 3$ hat algebraische Vielfachheit 2
aber geometrische Vielfachheit 1

$$\text{ar}(A, 3) = 2, \quad \text{gv}(A, 3) = 1$$

7.5 Quadratische Formen, Hauptachsentransformation

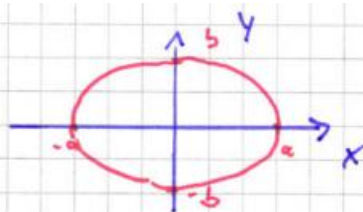
(1) Aufgabe

Wie sieht die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung
 $6x^2 + 8xy + 6y^2 = 20$
in der x - y -Ebene \mathbb{R}^2 aus?

Ellipsengleichung

Ellipsengleichung

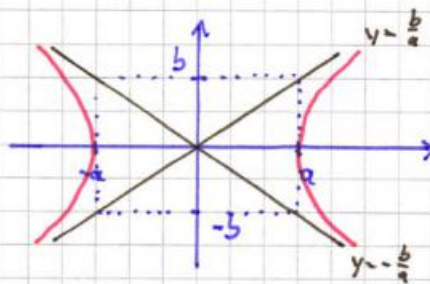
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Hyperbelgleichung

Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



(2) Quadratische Formen

Ein Ausdruck der Form

$$q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \vec{x}^T A \vec{x}$$

heißt quadratische Form in $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, wobei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^n$ eine symmetrische Matrix ist, d.h. $A^T = A$ bzw. $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$

a) Fall $n=2$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \bullet q(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} \\ &= ax^2 + bxy + bxy + cy^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 \end{aligned}$$

$$\bullet q(\vec{x}) = 6x^2 + 8xy + 6y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Spezialfall

Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine Diagonalmatrix, etwa $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\text{so gilt } q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

(3) Lineare Koordinatentransformation

Darstellung des Vektors (Punkts) $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ bzgl. verschiedener Basen des \mathbb{R}^n

(a) Standardbasis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$

Dann gilt

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n$$

x_1, \dots, x_n sind Koordinaten von \vec{x} bzgl. der Standardbasis

(b) neue Basis $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$

Vektor \vec{x} hat genau eine Darstellung der Form

$$\vec{x} = u_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + u_n \cdot \vec{b}_n$$

u_1, \dots, u_n sind Koordinaten von \vec{x} bzgl. Basis $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$

$\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ Koordinatenvektor von \vec{x} bzgl. Basis $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$

(c) Transformationsgleichung (Umrechnung zwischen \vec{x} und \vec{u})

Matrix $T = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ ist invertierbar und es gilt

$$\vec{x} = T \cdot \vec{u} \quad (*)$$

Die Abbildung

$\vec{u} \in \mathbb{R}^n \mapsto \vec{x} = T \cdot \vec{u}$ ist linear und bijektiv

$$\vec{x} = T \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = T^{-1} \cdot \vec{x}$$

Man nennt $(*)$ eine lineare Koordinatentransformation

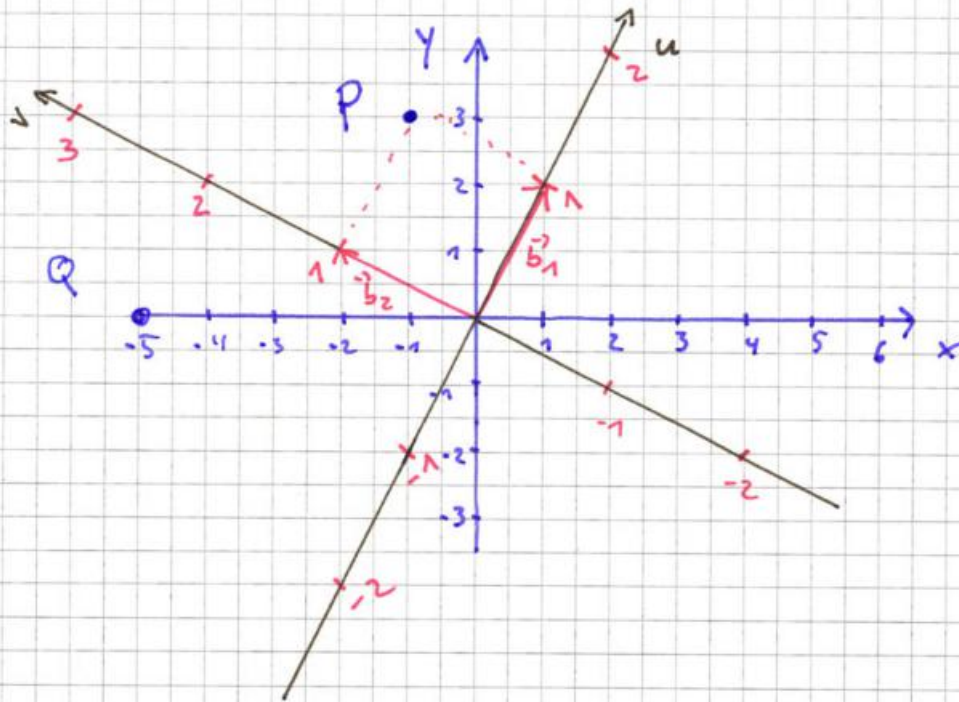
Beispiel

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformationsgleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{matrix} x = u - 2v \\ y = 2u + v \end{matrix}$

Koordinatenvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$	Vektor (Punkt) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
$\vec{u} = \vec{0}$	$\vec{x} = \vec{0}$
$\vec{u} = \vec{e}_1$	$\vec{x} = \vec{b}_1$
$\vec{u} = \vec{e}_2$	$\vec{x} = \vec{b}_2$
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$



Punkt P hat x-y Koord. $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und u-v Koordinaten $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkt Q mit x-y Koord $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat u-v Koord. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(4) Hauptachsentransformation

(a) Transformationsformel für quadratische Gleichungen

$$\vec{x}^T A \vec{x} = d$$

quadr. Gl. in $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$
 $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symm. Matrix, $d \in \mathbb{R}$

Transformation $\boxed{\vec{x} = T \vec{u}}$
 $T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ invertierbar

$$\vec{u}^T (T^T A T) \vec{u} = d$$

quadr. Gl. in $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$
 $D := T^T A T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist symm.

Bew:

- $\vec{x}^T A \vec{x} = (T \vec{u})^T A (T \vec{u}) = \vec{u}^T (T^T A T) \vec{u}$
- $(T^T A T)^T = T^T A^T (T^T)^T = T^T A T$

(b) Zielstellung

(b) Zielstellung

Geg: $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symm. Matrix

Ges: $T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ derart dass gilt

(b1) T ist orthogonal $\Rightarrow T^T = T^{-1}$

(b2) $D = T^T A T$ ist Diagonalmatrix

Bemerkung (b1) bewirkt: neues Koord.-syst. ist rechtwinklig
 (b2) bewirkt: Lösungsmenge der Gleichung gut darstellbar

Lösung

Bestimmen falls möglich ONB $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ des \mathbb{R}^n aus lauter EV von A . Ist \vec{b}_i EV zum EW λ_i dann gilt

$$A \vec{b}_i = \lambda_i \vec{b}_i$$

und die Matrix $T = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ erfüllt (b1) und (b2)

$$D = T^T A T = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beweis

Beweis

• T ist orthogonal, da Spalten von T eine ONB bilden

$$\bullet T^{-1}AT = D \quad \Leftrightarrow \quad AT = TD$$

$$\Leftrightarrow A(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_n) = (\lambda_1\vec{b}_1, \dots, \lambda_n\vec{b}_n)$$

$$\Leftrightarrow A\vec{b}_i = \lambda_i\vec{b}_i \quad \forall i$$

$$\Leftrightarrow \vec{b}_i \text{ ist EV zu } \lambda_i \quad \text{für alle } i$$

(c) Satz (ohne Beweis)

Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ gilt

(c1) Alle EV von A sind reell, d.h. A hat n reelle EV gezählt mit ihren algebraischen Vielfachheiten

(c2) EV zu verschiedenen EW sind stets orthogonal

(c3) Für jeden EV von A sind algebraische und geometrische Vielfachheit gleich

(c4) Es gibt eine ONB des \mathbb{R}^n , die aus lauter EV von A besteht

(5) Beispiele

Bsp 1

Bsp 1

$$6x^2 + 8xy + 6y^2 = 20$$

Matrix-Vektor-Form: $(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 20$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad d = 20$$

a) EW und EV von A bestimmen

• EWG $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$

• $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 6-\lambda & 4 \\ 4 & 6-\lambda \end{pmatrix}$

• $P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (6-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 12\lambda + 20 \stackrel{!}{=} 0$

• EW von A $\lambda_{1/2} = 6 \pm \sqrt{16}$ $\lambda_1 = 10$ $\lambda_2 = 2$

• EV zu $\lambda_1 = 10$

$$(A - 10E)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$E(A, \lambda_1 = 10) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{ONB} \quad \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• EV zu $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2E)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$E(A, \lambda_2 = 2) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{ONB} \quad \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Transformationsmatrix $T = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Koordinatentransformation $\vec{x} = T\vec{u}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

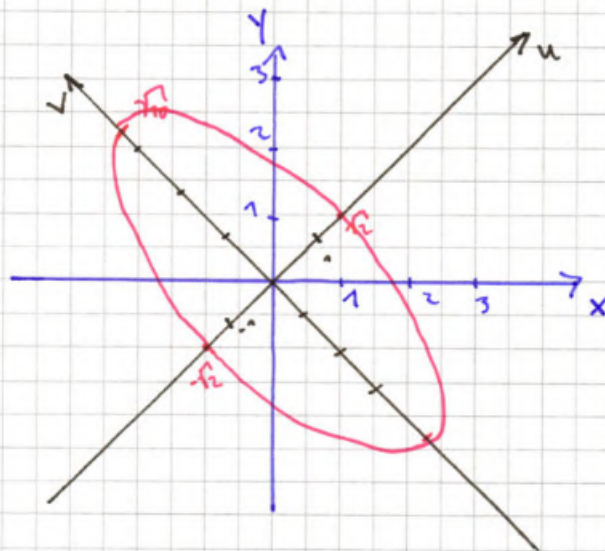
d) transformierte Gleichung

$$\vec{u}^T D \vec{u} = 20 \quad \text{mit } D = T^T A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$10 u^2 + 2 v^2 = 20$$

$$\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{10} = 1$$

e) Skizze



Bsp 2

Bsp 2

$$2x^2 + 12xy - 7y^2 = 20$$

• Matrix-Vektor Form: $(x \ y) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 20$

• char. Matrix $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & -7-\lambda \end{pmatrix}$

• $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-7-\lambda) - 36 = \lambda^2 + 5\lambda - 50 \stackrel{!}{=} 0$

• EV $\lambda_{1/2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{15}{2} \quad \lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = -10$

• EV zu $\lambda_1 = 5$

$$(A - \lambda_1 E) \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$E(A, 5) = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{ONB: } \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

• EV zu $\lambda_2 = -10$

$\vec{b}_2 \perp \vec{b}_1 \Rightarrow \vec{b}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Probe $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \end{pmatrix} = -10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ONB: $\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

• Transformationsmatrix $T = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

• Koordinatentransformation

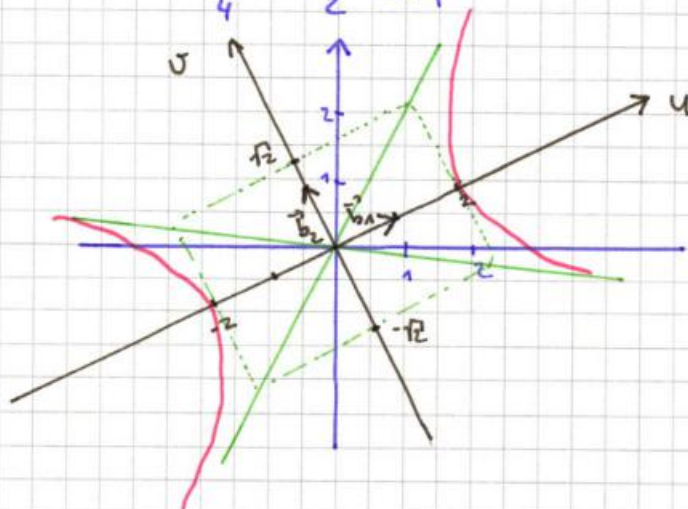
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

• transformierte Gleichung

$$\vec{x}^T A \vec{y} = \vec{u}^T T^T A T \vec{u} = \vec{u}^T D \vec{u} = (u, v) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 20$$

$$5u^2 - 10v^2 = 20$$

$$\frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{2} = 1$$



Bsp3

$$7x^2 + 13y^2 + 6\sqrt{3}xy - 12(\sqrt{3}+4)x - 12(4\sqrt{3}-1)y = -164$$

• Matrix-Vektor Schreibweise

$$(x, y) \begin{pmatrix} 7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-12(\sqrt{3}+4), -12(4\sqrt{3}-1)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -164$$

$$\vec{x}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} = d$$

• EV und EV von A

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 91 - 27 = \lambda^2 - 20\lambda + 64 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = 10 \pm \sqrt{100-64} \quad \lambda_1 = 16 \quad \lambda_2 = 4$$

• EV zu $\lambda_1 = 16$ $(A - 16E) \vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -9 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

• $\vec{b}_2 \perp \vec{b}_1 \Rightarrow \vec{b}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ Probe: $A \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow T = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

• Transformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

• transformierte Gleichung

$$(uv) T^T A T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \vec{b}^T T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = d$$

$$(uv) \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + (-12) \cdot (\sqrt{3}+4, 4\sqrt{3}-1) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -164$$

$$16u^2 + 4v^2 - 6 \begin{pmatrix} 16 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -164$$

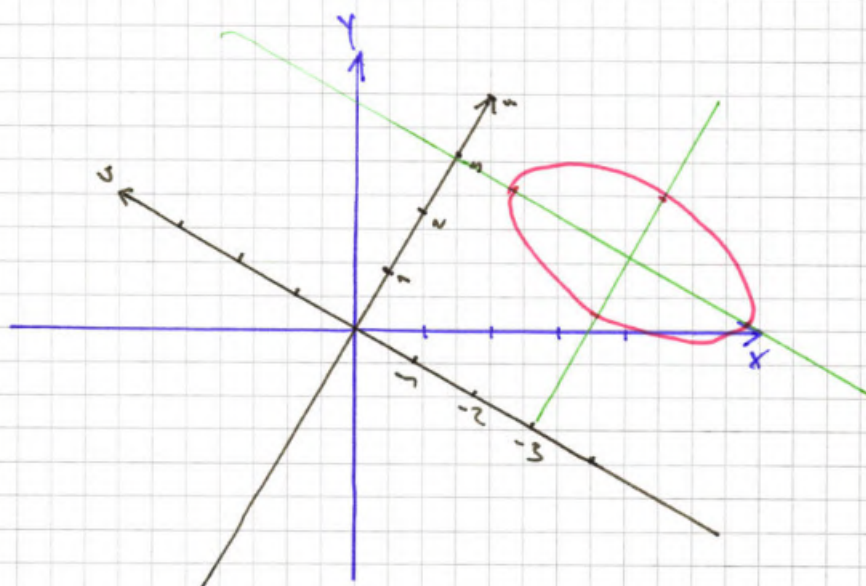
$$16u^2 + 4v^2 - 96u + 24v = -164$$

$$16(u^2 - 6u) + 4(v^2 + 6v) = -164$$

$$16(u^2 - 6u + 9) + 4(v^2 + 6v + 9) = -164 + 144 + 36$$

$$16(u-3)^2 + 4(v+3)^2 = 16$$

$$\frac{(u-3)^2}{1^2} + \frac{(v+3)^2}{2^2} = 1$$



7.6 Affine Abbildungen $K^m \rightarrow K^n$

(1) Definition

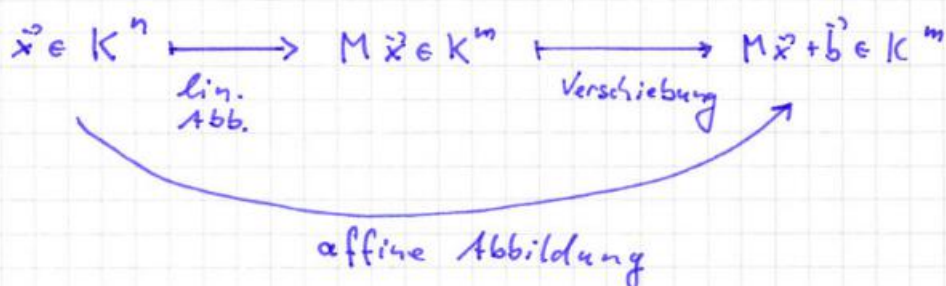
$F: K^n \rightarrow K^m$ wird affine Abbildung genannt, falls für alle $\vec{x} \in K^n$ gilt

$$F(\vec{x}) = M\vec{x} + \vec{b}$$

mit $M \in K^{(m,n)}$ und $\vec{b} \in K^m$

Spezialfälle

- $M = E, m = n$: $F(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{b}$ (Verschiebung, Translation)
- $\vec{b} = \vec{0}$: $F(\vec{x}) = M\vec{x}$ (lineare Abbildung)
- $M \in O(n)$: F ist Bewegung



(2) Affine Koordinatentransformation im \mathbb{R}^n

- affines Koordinatensystem = (Punkt, Basis des \mathbb{R}^n)
- Punkt (Vektor) $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

(a) Standardsystem $(\vec{0}; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

$$\vec{x} = \vec{0} + x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

(b) neues Koordinatensystem $(\vec{r}_0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$

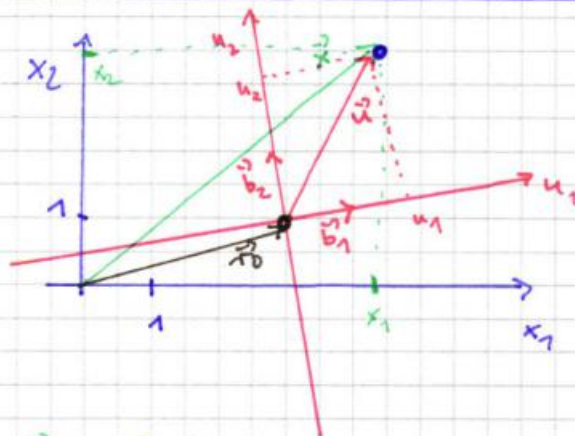
$$\vec{x} = \vec{r}_0 + u_1 \vec{b}_1 + \dots + u_n \vec{b}_n$$

$\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ affiner Koordinatenvektor von \vec{x} bzgl. $(\vec{r}_0; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$

(c) Transformation

$$\vec{x} = \vec{r}_0 + T \vec{u} \quad T = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

$$\vec{u} = T^{-1}(\vec{x} - \vec{r}_0) \quad (T \text{ invertierbar})$$



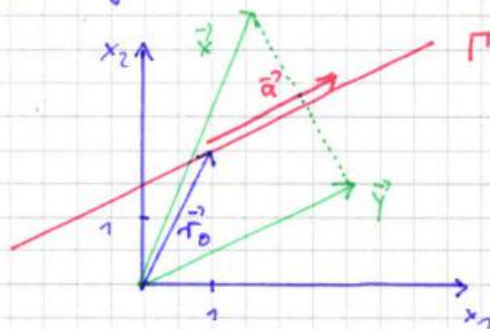
$$\vec{x} = \vec{r}_0 + T \vec{u}$$

$$\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{r}_0$$

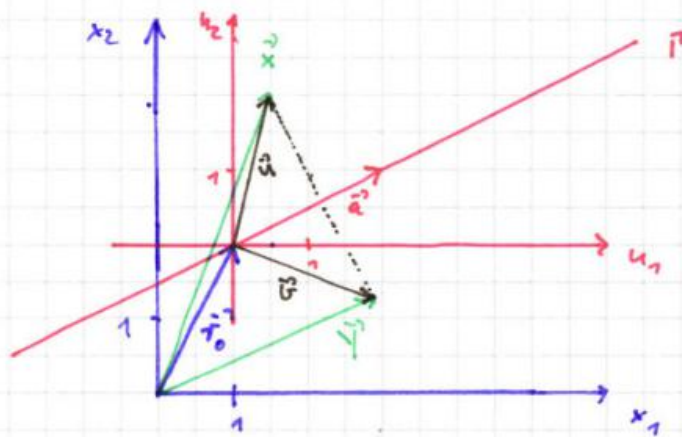
(3) Beispiel: Spiegelung im \mathbb{R}^2 an Geraden

Geg: $\Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{a}]$ $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ges: Spiegelung $\vec{y} = F(\vec{x})$ \vec{x}, \vec{y} im Standardsystem



Lösung 1 (besonders einfache Koordinatentransformation)



\vec{u}, \vec{v} seien Koordinatenvektoren von \vec{x}, \vec{y} in $(\vec{r}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{x} &= \vec{r}_0 + \vec{u} & \vec{u} &= \vec{x} - \vec{r}_0 \\ \vec{y} &= \vec{r}_0 + \vec{v} & \vec{v} &= \vec{y} - \vec{r}_0 \end{aligned} \quad T = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = E$$

Abbildung $\vec{u} \mapsto \vec{v}$ ist Spiegelung an Ursprungsgeraden $[\vec{a}]$ also $\vec{v} = M \cdot \vec{u}$ und es gilt:

$$M \vec{a} = \vec{a} \quad M \vec{b} = -\vec{b} \quad \text{für } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \vec{a}$$

$$\Rightarrow M(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, -\vec{b})$$

$$\Rightarrow M = (\vec{a}, -\vec{b}) \cdot (\vec{a}, \vec{b})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$\vec{v} = M \vec{u} \quad \vec{v} = \vec{y} - \vec{r}_0 \quad \vec{u} = \vec{x} - \vec{r}_0$$

$$\vec{y} - \vec{r}_0 = M(\vec{x} - \vec{r}_0)$$

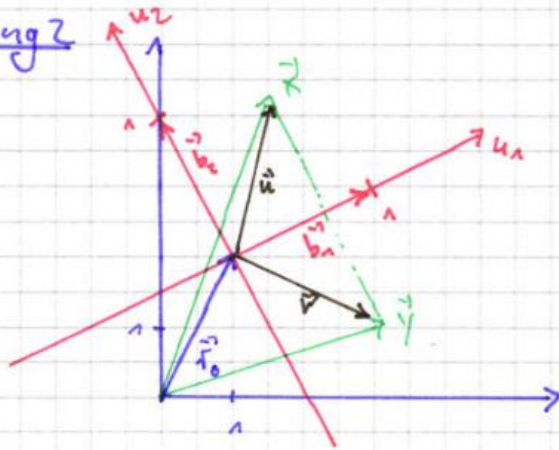
$$\vec{y} = M(\vec{x} - \vec{r}_0) + \vec{r}_0$$

$$\vec{y} = M\vec{x} + \underbrace{\vec{r}_0 - M\vec{r}_0}_{\vec{b}}$$

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \vec{r}_0 - M\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\vec{y} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}}}$$

Lösung 2



neues Koordinatensystem $(\vec{r}_0; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$

mit $\vec{b}_1 = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b}_2 \perp \vec{b}_1$

\vec{u} Koordinatenvektor von \vec{x} bzgl. $(\vec{r}_0; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$

\vec{v} " " " " "

$$\vec{x} = \vec{r}_0 + T \vec{u}$$

$$\vec{u} = T^{-1}(\vec{x} - \vec{r}_0)$$

$$\vec{y} = \vec{r}_0 + T \vec{v}$$

$$\vec{v} = T^{-1}(\vec{y} - \vec{r}_0)$$

$$T = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Im neuen Koord.-system Spiegelung an u_1 -Achse

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{u}$$

$$\Rightarrow T^{-1}(\vec{y} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1}(\vec{x} - \vec{r}_0)$$

$$\Rightarrow \vec{y} - \vec{r}_0 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1}(\vec{x} - \vec{r}_0)$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} (\vec{x} - \vec{r}_0) + \vec{r}_0$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} (\vec{x} - \vec{r}_0) + \vec{r}_0$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x} + \left(-\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + E \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\vec{y} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}}}$$

Geg: Link-Struktur von html-Seiten als gerichteter Graph. $G=(V,E)$ $(ij) \in E \Leftrightarrow \exists$ Link von Seite i zu Seite j

Ges: Bewertungsfunktion für die Wichtigkeit einer Seite

Idee: Seite ist umso wichtiger, je mehr wichtige Seiten auf sie verlinken

Formalisierung:

$V = \{1, \dots, n\}$ Menge der Seiten

PR_j = PageRank der Seite $j \in V$

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} PR_1 \\ \vdots \\ PR_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

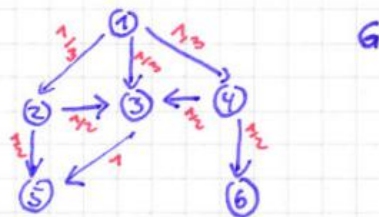
$$PR_j = \frac{1-d}{n} + d \sum_{i \in V} \frac{1}{d_A(i)} \cdot PR_i$$

$i \rightarrow j \in E$

Gesucht:
Lösung mit
 $\sum PR_j = 1$

d = Dämpfungskern Original $d=0,85$

Bsp:



Adjazenzmatrix $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M := \frac{1-d}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spalten ersetzen
durch
 $\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für die Lösung gilt dann

$$\vec{PR} = M \cdot \vec{PR}$$

Eigenwertgleichung

$$\vec{PR} \approx \begin{pmatrix} 0,09 \\ 0,12 \\ 0,21 \\ 0,12 \\ 0,32 \\ 0,14 \end{pmatrix}$$

↑
Transponierte der
Google-Matrix

- Interpretationsmöglichkeit: Zufallssurfer-Modell
Surfer startet irgendwo und folgt in jeder Runde mit w_k d. einem der ausgehenden Links und mit $w_k \cdot d$ geht er zu irgendeiner Seite
- $PR_j = w_k$, dass der Surfer nach m Runden auf Seite j ist (für $m \rightarrow \infty$)
- Gleichung kann analytisch gelöst werden oder iterativ

$$\vec{PR}(t+1) := M \cdot \vec{PR}(t)$$

konvergiert für beliebige Startvektoren

(kleines Problem, wenn der Graph Seiten enthält)
siehe grüne Korrektur

Kapitel IV: Funktionen in mehreren Variablen, Differentiation

1 Grundbegriffe

1.1 Funktionen aus \mathbb{R}^n in \mathbb{R}

(1) Definition

Eine Funktion f aus \mathbb{R}^n in \mathbb{R} ist eindeutig bestimmt durch

(a) $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ Definitionsbereich

(b) eine eindeutige Zuordnungsvorschrift

$$\begin{array}{ccc} \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D_f & \mapsto & f(\underline{x}) \in \mathbb{R} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Argumente von } f & & \text{Funktionswert von } f \text{ an der Stelle } \underline{x} \end{array}$$

(2) Darstellung von f

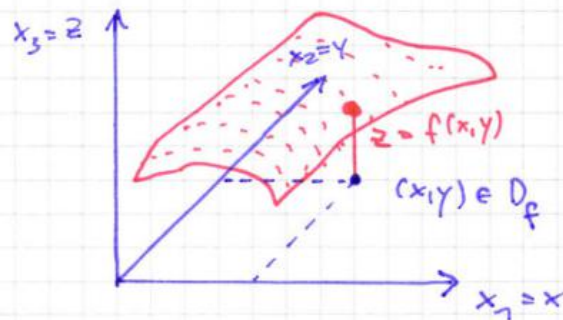
(a) Graph von f

$$\text{graph}(f) := \{ (\underline{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \underline{x} \in D_f, x_{n+1} = f(\underline{x}) \}$$

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n) & & \\ \uparrow & & \nwarrow \\ \text{abhängige Variable} & & \text{unabhängige Variablen} \end{array}$$

($n=1$) $\text{graph}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ Spur der Kurve $y = f(x)$

($n=2$) $\text{graph}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ Fläche im \mathbb{R}^3 $z = f(x, y)$



(b) Niveaumengen von f

$$N_c(f) := \{ \underline{x} \in D_f \mid f(\underline{x}) = c \} \quad c \in \mathbb{R} \text{ Konstante} \quad N_c(f) \subseteq \mathbb{R}^n$$

Bsp: $n=2$ $N_c(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ Höhenlinien

$$\bullet f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\bullet f(x,y) = c \Leftrightarrow x^2 - y^2 = c \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{x^2 - c}$$

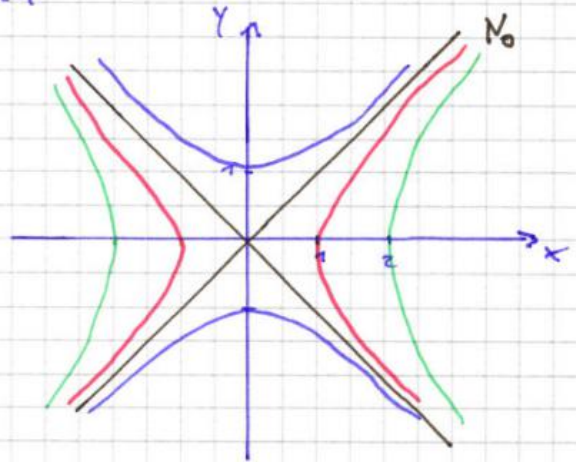
Hyperbeln

$$N_0(f) = \{ (x,y) \mid y = \pm x \}$$

$$N_1(f) = \{ (x,y) \mid x^2 - y^2 = 1 \}$$

$$N_4(f) = \{ (x,y) \mid \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1 \}$$

$$N_{-1}(f) = \{ (x,y) \mid y^2 - x^2 = 1 \}$$



(c) Schnittkurven von f

Funktion $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

Punkt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$

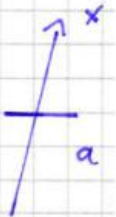
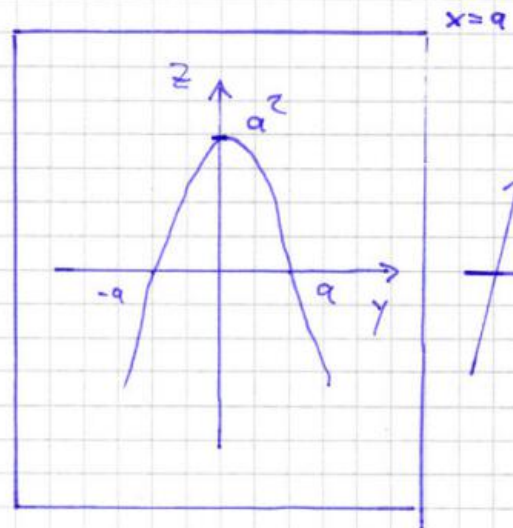
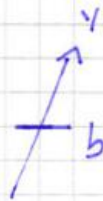
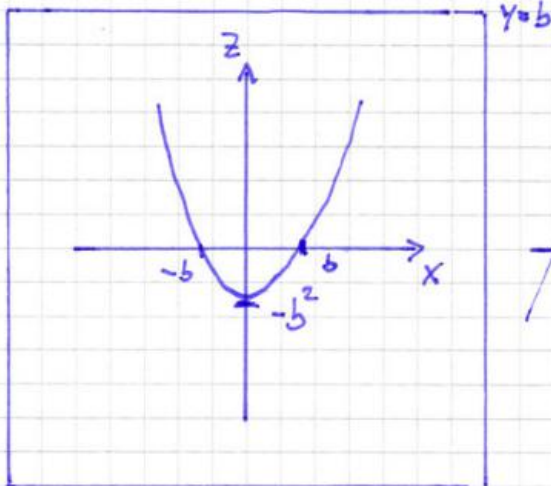
Schnittkurve von f im Punkt \underline{a} in x_i -Richtung

$$x_i \in D' \subseteq \mathbb{R} \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$$

Beispiel ($n=2$) $f(x,y) = x^2 - y^2$ $D = \mathbb{R}^2$ $\underline{a} = (a,b)$

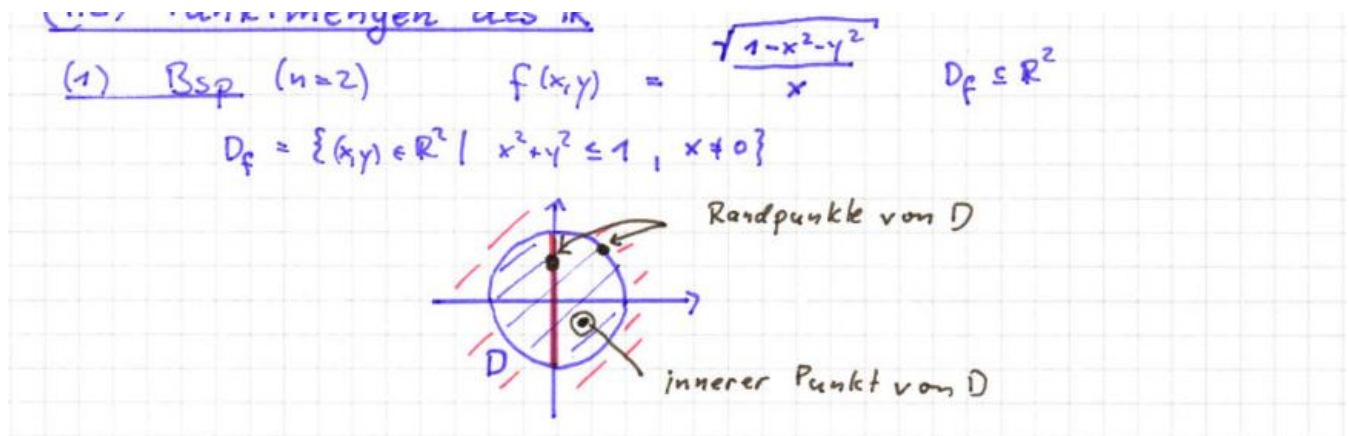
Schnittkurve in x -Richtung

$$x \in \mathbb{R} \mapsto z = f(x,b) = x^2 - b^2$$

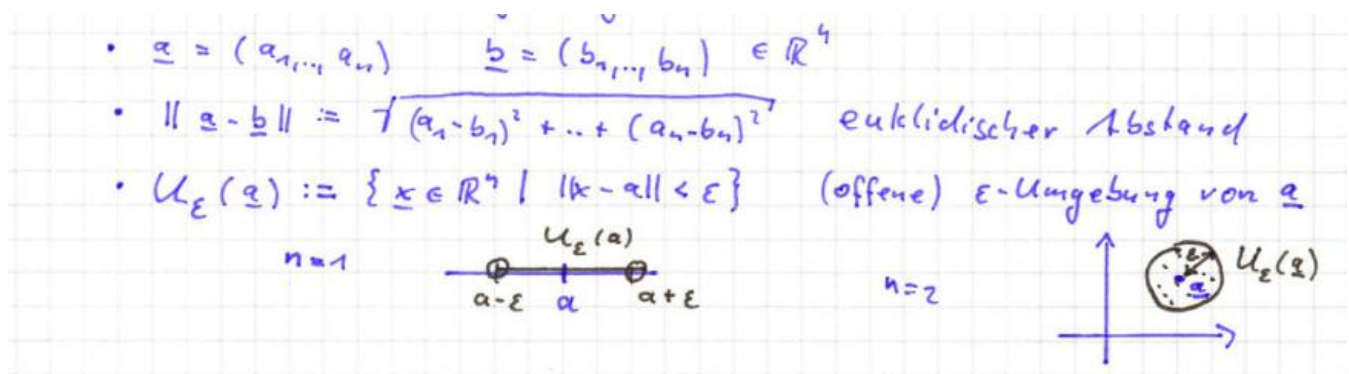


1.2 Punktmengen des \mathbb{R}^n

(1) Bsp



(2) Abstand ε -Umgebung



(3) Definition

- (a) a heißt innerer Punkt von D , falls es eine ε -Umgebung von a gibt, die nur Punkte aus D enthält. Insbesondere muss $a \in D$ sein. $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq D$
- b) a heißt Randpunkt von D , falls jede ε -Umgebung von a sowohl Punkte aus D als auch Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus D$ enthält
 $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap D \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^n \setminus D) \neq \emptyset$
- c) ∂D : Menge aller Randpunkte von D (Rand von D) auch $\text{bd}(D)$
- d) $\text{int}(D)$ Menge aller inneren Punkte von D (Inneres von D)
- e) D heißt offen, falls D keine Randpunkte von D enthält, d.h. $\partial D \cap D = \emptyset$
- f) D heißt abgeschlossen, falls D alle seine Randpunkte enthält, d.h. $\partial D \subseteq D$
- g) a heißt Häufungspunkt von D , falls jede ε -Umgebung von a unendlich viele Punkte aus D enthält

Bemerkung

$$D \text{ offen} \stackrel{U}{\Leftrightarrow} \partial D \cap D = \emptyset \Leftrightarrow D = \text{int}(D)$$

$$D \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \partial D \subseteq D \Leftrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Häufungspunkt von } D}}{h_p(D)} \subseteq D \Leftrightarrow \bar{D} \text{ ist abgeschlossen}$$

$\bar{D} = \mathbb{R}^n \setminus D$ Komplement von D

Beispiel

(a) $D = (1, 3) \subseteq \mathbb{R}$ Intervall $\partial D = \{1, 3\}$ $D \cap \partial D = \emptyset \Rightarrow$ offen

(b) $D = \mathbb{R}^2$ $\partial D = \emptyset$ keine Randpunkte

$\Rightarrow D \cap \partial D = \emptyset \Rightarrow D$ offen

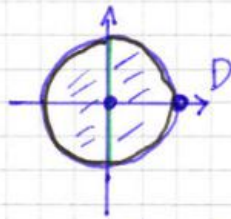
$\partial D \subseteq D \Rightarrow D$ auch abgeschlossen

$D = \emptyset \Rightarrow \partial D = \emptyset$ offen und abgeschlossen

Beobachtung D offen und abgeschlossen $\Leftrightarrow \partial D = \emptyset$

(c) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \neq 0\}$

$\partial D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \mid x = 0, -1 < y < 1\}$



• $D \cap \partial D \neq \emptyset$ z.B. $(1, 0) \in D \cap \partial D \Rightarrow D$ nicht offen

• $\partial D \not\subseteq D$ z.B. $(0, 0) \in \partial D \setminus D \Rightarrow D$ nicht abgeschlossen

2 Grenzwert und Stetigkeit

2.1 Punktfolgen im \mathbb{R}^n

Punktfolge $k \in \mathbb{N} \mapsto \underline{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$
Punkt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

(1) Grenzwert von $\underline{x}^{(k)}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{a} \quad \Leftrightarrow_{\text{Def}} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\underline{x}^{(k)} - \underline{a}\| = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = a_i \quad \text{für } i=1, \dots, n$$

(2) Beispiele

(2) Beispiele $n=2$

$$\bullet \quad \underline{x}^{(k)} = \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \frac{1}{k} \right) \quad \begin{matrix} \rightarrow e \\ \rightarrow 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}^{(k)} = (e, 0) \in \mathbb{R}^2$$

$$\bullet \quad \underline{x}^{(k)} = \left(1 + \frac{1}{k}, k \right) \quad \begin{matrix} \rightarrow 1 \\ \rightarrow \infty \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}^{(k)} = (1, \infty) \notin \mathbb{R}^2$$

2.2 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Gegeben

- Funktion f aus \mathbb{R}^n in \mathbb{R} , $D = D_f \in \mathbb{R}^n$
- Punkt $a \in D \cup \partial D$

(1) Definition

(1) Definition : $g \in \mathbb{R}$ oder $g = \pm \infty$

(a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$, falls für alle Punktfolgen $x^{(k)}$ mit $x^{(k)} \neq a$ aus D und $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = g$

(b) f heißt stetig in a , falls gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

(c) f heißt stetig auf D , falls für alle $a \in D$ gilt f ist stetig in a

Bemerkung Genau wie im 1-Variablen-Fall können Grenzwerte auf äquivalente Weise durch ε - δ Definition erklärt werden

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

(2) Satz

Für Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen aus \mathbb{R}^n in \mathbb{R} gelten die analogen Regeln wie für Funktionen aus \mathbb{R} in \mathbb{R} .

Insbesondere sind Summe, Differenz, Quotient, Produkt, Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig.

(3) Beispiele ($n = 2$)

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $D = D_f = \mathbb{R}^2$

- Projektionsfunktionen p_1, p_2 mit $p_1(x,y) = x$, $p_2(x,y) = y$ sind stetig
- $g(t) = t^2$ g stetig für alle t

$\Rightarrow h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = g(p_1(x,y)) + g(p_2(x,y)) = x^2 + y^2$ stetig $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $k(z) = \sqrt{z}$ k stetig für alle $z \geq 0$

$\Rightarrow f(x,y) = k(h(x,y))$ f stetig $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ da $h(x,y) \geq 0$

b) $f(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\partial D_f = \{(0,0)\}$

- f stetig auf D_f

• $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = ?$ $\frac{0}{0}$

$\underline{x}^{(k)} = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0,0)$ $f(\underline{x}^{(k)}) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$

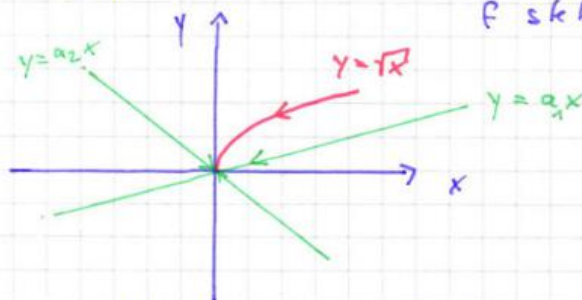
$\underline{x}^{(k)} = \left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0,0)$ $f(\underline{x}^{(k)}) = \frac{-\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{\underline{x} \rightarrow 0} f(\underline{x})$ existiert nicht

• $f(x, y=ax) = \frac{ax^2}{x^2+a^2x^2} = \frac{a}{1+a^2}$

\Rightarrow Die Gerade $y=ax$ gehört zur Niveaumenge $M_c(f)$ für $c = \frac{a}{1+a^2}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x y^2}{x^2 + y^4} = ?$ $f(x,y) = \frac{x y^2}{x^2 + y^4}$
 f stetig für $(x,y) \neq (0,0)$



1) Punktfolge entlang y-Achse ($x=0$)

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y^2}{0 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

2) Punktfolge entlang Geraden $y = ax$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^3 x^3}{x^2 + a^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^3 x}{1 + a^4 x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

3) Punktfolge entlang $y = \sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

\Rightarrow Grenzwert existiert nicht

d) $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ stetig auf $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = ?$$

y-Achse: $f(0,y) = \frac{0}{y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$

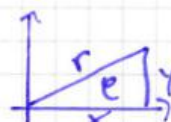
$y = ax$ $f(x, ax) = \frac{a^2 x^4}{x^2 + a^2 x^2} = \frac{a^2 x^2}{1 + a^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0}{1 + a^2} = 0$

$y = \sqrt{x}$ $f(x, \sqrt{x}) = \frac{x^3}{x^2 + x} = \frac{x^2}{1 + x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0}{1} = 0$

\Rightarrow nichts

Lösung: Polar koordinaten

$$(x,y) \rightarrow (0,0) \Leftrightarrow r \rightarrow 0 \quad \varphi \text{ egal}$$



$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{r^2 \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin^2 \varphi}{r^2} = r^2 \underbrace{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}_{\text{beschränkt}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

3 Ableitung, Gradient, Differential

3.1 Partielle Ableitung, Gradient

Gegeben

- Fkt $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$
- Pkt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$

(1) Partielle Ableitung

Definition

Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$ nach x_i ist die Ableitung der Funktion

$$x_i \in D' \subseteq \mathbb{R} \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$$

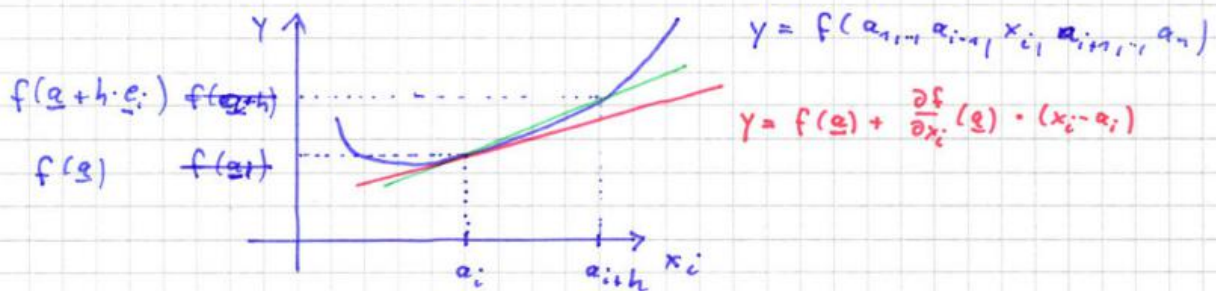
nach x_i an der Stelle $x_i = a_i$, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{a} + h \cdot \underline{e}_i) - f(\underline{a})}{h}$$

sofern der GW existiert und endlich ist

Geometrische Interpretation

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ ist der Anstieg der Tangenten an die Schnittkurve von f in x_i -Richtung im Punkt $\underline{x} = \underline{a}$.



Linearer Zuwachs von f in Punkt $\underline{x} = \underline{a}$ in x_i -Richtung

Für sehr kleine Werte von h gilt näherungsweise

$$f(\underline{a} + h \cdot \underline{e}_i) \approx f(\underline{a}) + h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$$

Somit beschreibt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ den linearen Zuwachs von f im Punkt $\underline{x} = \underline{a}$ in x_i -Richtung.

Definition

Man nennt $\text{grad} f(\underline{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a}) \right)$

den Gradienten von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$. Die Fkt. f heißt stetig differenzierbar auf der Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, falls für alle Punkte $\underline{x} \in D$ die partiellen Ableitungen nach sämtlichen Variablen x_i an der Stelle \underline{x} existieren und dort stetig sind.

Bemerkung

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$ wird wie normale Ableitung von f nach x_i gebildet, wobei alle $x_j \neq x_i$ wie Konstanten behandelt werden
- Für partielle Ableitungen von f nach x_i gelten die üblichen Regeln

$$\frac{\partial (f \pm g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \pm \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial (c \cdot f)}{\partial x_i} = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (c \in \mathbb{R} \text{ Konstante}) \quad \text{usw.}$$
- statt $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ schreibt man auch f_{x_i}
- In der Physik wird der Gradient meist als Spaltenvektor der partiellen Ableitungen definiert und mit ∇f abgekürzt

$$\nabla f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\underline{a}) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\underline{a}) \end{pmatrix}$$

∇f
 Mala

Beispiel 1

Bsp 1 ($n=2$)

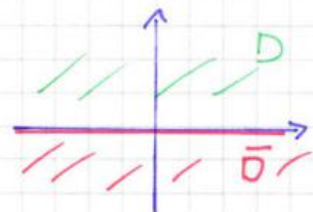
• $f(x, y) = x^2 \sqrt{y}$ $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$

• $\underline{a} = (2, 4)$

• $f(x, 4) = 2x^2$ $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 4) = \frac{d(2x^2)}{dx} \Big|_{x=2} = 4x \Big|_{x=2} = 8$
 $f(2, y) = 4\sqrt{y}$ $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 4) = \frac{d(4\sqrt{y})}{dy} \Big|_{y=4} = \frac{2}{\sqrt{y}} \Big|_{y=4} = 1$ $\Rightarrow \text{grad} f(2, 4) = (8, 1)$

• $f_x(x, y) = 2x\sqrt{y}$, $f_y(x, y) = \frac{x^2}{2\sqrt{y}}$ $\Rightarrow \text{grad} f(x, y) = \left(2x\sqrt{y}, \frac{x^2}{2\sqrt{y}} \right)$

• f stetig diff'bar auf D



Beispiel 2

- $h(x_1, \dots, x_n) = m_1(x_1 - a_1) + \dots + m_n(x_n - a_n) + b$ $D = D_h = \mathbb{R}^n$
- $x_{n+1} = h(x_1, \dots, x_n)$ ist Gleichung einer Hyperebene im \mathbb{R}^{n+1}
 Normalenvektor $(m_1, \dots, m_n, -1)^T$, $(a_1, \dots, a_n, b)^T \in \text{Ebene}$
 $n=1$ Gerade im \mathbb{R}^2 , $n=2$ Ebene im \mathbb{R}^3
- $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = m_i$

(2) Tangentialraum von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$

Der Tangentialraum ist die Hyperebene $x_{n+1} = h(x_1, \dots, x_n)$
 mit $h(\underline{a}) = f(\underline{a})$ und Anstieg m_i in x_i -Richtung
 wie bei f in $\underline{x} = \underline{a}$ also $m_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$

Gleichung des Tangentialraumes

$$x_{n+1} = f(\underline{a}) + f_{x_1}(\underline{a})(x_1 - a_1) + \dots + f_{x_n}(\underline{a})(x_n - a_n)$$

Spezialfälle $n=1$ Tangente $n=2$ Tangentialebene

Beispiel

Bsp: $n=2$

- $f(x, y) = x^2 y$ $\underline{a} = (2, 4)$
- $f(2, 4) = 8$ $f_x(2, 4) = 8$ $f_y(2, 4) = 1$
- Tangentialebene von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$
 $z = f(\underline{a}) + f_x(\underline{a})(x - a_1) + f_y(\underline{a})(y - a_2)$
 $z = 8 + 8(x - 2) + 1(y - 4)$
 $z = 8x + y - 12$

Merke

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow z = f(x_0, y_0) + \text{grad}f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Tangente ($n=1$) an den Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$ Tangentialebene ($n=2$) an den Graphen von f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ($n=2$)

↓

$$x_{n+1} = f(\underline{a}) + \text{grad}f(\underline{a}) \cdot (\underline{x} - \underline{a})^T$$

Tangentialraum von f durch $(\underline{a}, f(\underline{a}))$

(3) Richtungsableitung von f

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{a} + h \cdot \underline{v}_0) - f(\underline{a})}{h}$$

heißt, falls der GW existiert und endlich ist, Richtungsableitung von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$ in Richtung \underline{v} mit $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$. Dabei ist $\underline{v}_0 = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v}$ der Einheitsvektor in Richtung \underline{v} .

Bemerkung

- $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a})$ = Anstieg von f im Punkt \underline{a} in \underline{v} -Richtung
- $\underline{v} = \underline{e}_i \Rightarrow \underline{v}_0 = \underline{e}_i = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$
(partielle Ableitungen sind spezielle Richtungsableitungen)

Satz (ohne Beweis)

Ist die Funktion f stetig diff'bar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ so gilt für alle $\underline{a} \in D$ und alle Richtungen $\underline{v} \neq \underline{0}$ aus \mathbb{R}^n

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \langle \text{grad } f(\underline{a}), \underline{v} \rangle$$

Beispiel

$$\begin{aligned} & \bullet f(x, y) = x^2 \sqrt{y} \quad \underline{a} = (2, 4) \quad \underline{v} = (1, 1) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \\ & \bullet \left. \begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x\sqrt{y} \\ f_y(x, y) &= \frac{x^2}{2\sqrt{y}} \end{aligned} \right\} \text{grad } f(x, y) = \left(2x\sqrt{y}, \frac{x^2}{2\sqrt{y}} \right), \text{grad } f(2, 4) = (8, 1) \\ & \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(2, 4) = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \langle \text{grad } f(2, 4), \underline{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (8, 1), (1, 1) \rangle = \frac{9}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Folgerung 1

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \langle \text{grad} f(\underline{a}), \underline{v} \rangle = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \|\text{grad} f(\underline{a})\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \cos \angle(\text{grad} f(\underline{a}), \underline{v})$$

$$= \|\text{grad} f(\underline{a})\| \cdot \cos \angle(\text{grad} f(\underline{a}), \underline{v})$$

$$\bullet \text{ Für festes } \underline{a} \text{ gilt } \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) \text{ maximal } (\Leftrightarrow) \cos \angle(\text{grad} f(\underline{a}), \underline{v}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \underline{v} \text{ gleichgerichtet zu } \text{grad} f(\underline{a})$$

somit gilt

(a) $\text{grad} f(\underline{a})$ zeigt in Richtung des größten Anstiegs von f im Punkt $\underline{x} = \underline{a}$

(b) Für $\underline{v} = \text{grad} f(\underline{a})$ ist also $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a})$ am größten mit

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \|\text{grad} f(\underline{a})\|$$

falls $\underline{v} = \text{grad} f(\underline{a}) \neq \underline{0}$ ist.

c) Ist $\text{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$ so gilt für alle Richtungen $\underline{v} \neq \underline{0} \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \langle \text{grad} f(\underline{a}), \underline{v} \rangle = 0$$

Folgerung 2

$$f(\underline{a} + \underline{v}) - f(\underline{a}) \approx \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{a}) \cdot \|\underline{v}\| = \langle \text{grad} f(\underline{a}), \underline{v} \rangle$$

Bemerkung

Folgerungen 1 und 2 gelten nur für stetig diff'bare Fkt. f

3.2 Differential einer Funktion f

Gegeben

- Fkt $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$
- $D \subseteq D_f$ sei offene Menge

(1) Differential von f

$$df(\underline{x}, d\underline{x}) = \langle \text{grad} f(\underline{x}), d\underline{x} \rangle = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\underline{x}) dx_i$$

wird (totales) Differential von f genannt

Das Differential df ist abhängig von

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{und} \quad d\underline{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$$

↑
Argumentvektor
 x_i reelle Zahlen

↑
Argument differentiale
 dx_i reelle Zahlen

Kurzschreibweise

$$df = f_{x_1} dx_1 + \dots + f_{x_n} dx_n$$

Bemerkung

df ist linear in $d\underline{x}$, d.h.

$$df(\underline{x}, d\underline{x} + d\underline{z}) = df(\underline{x}, d\underline{x}) + df(\underline{x}, d\underline{z})$$

$$df(\underline{x}, \alpha \cdot d\underline{x}) = \alpha \cdot df(\underline{x}, d\underline{x}) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(2) Funktionswertdifferenz

$$\Delta f(\underline{x}, d\underline{x}) := f(\underline{x} + d\underline{x}) - f(\underline{x})$$

Definition

Die Funktion f heißt an der Stelle $\underline{x} = \underline{a} \in D$

vollständig differenzierbar bzw. total differenzierbar, falls gilt:

$$\lim_{\|\underline{dx}\| \rightarrow 0} \frac{\Delta f(\underline{x}, \underline{dx}) - df(\underline{x}, \underline{dx})}{\|\underline{dx}\|} = 0$$

Bemerkung

- $\|\underline{dx}\| = \sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \underline{dx} = (dx_1, \dots, dx_n) \rightarrow \underline{0}$
- Für $\|\underline{dx}\|$ nahe 0 gilt dann $\Delta f(\underline{x}, \underline{dx}) \approx df(\underline{x}, \underline{dx})$

Beispiel

- $f(x, y) = x \cdot y \quad D = \mathbb{R}^2$
 - $df(x, y, dx, dy) = f_x(x, y) \cdot dx + f_y(x, y) \cdot dy = y dx + x dy$
 - $\Delta f(x, y, dx, dy) = f(x+dx, y+dy) - f(x, y) = (x+dx)(y+dy) - xy$
 $= xy + x dy + y dx + dx dy - xy = x dy + y dx + dx dy$
 - $\frac{\Delta f(x, y, dx, dy) - df(x, y, dx, dy)}{\|(dx, dy)\|} = \frac{dx dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \xrightarrow{(dx, dy) \rightarrow (0,0)} 0$
- $\Rightarrow f$ für alle $\underline{x} \in D = \mathbb{R}^2$ total diff'bar

Satz

Ist f stetig diff'bar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist f
für alle $\underline{x} \in D$ total differenzierbar

(3) Anwendung

(a) Fehlerrechnung (Fehlerfortpflanzung)

- exakte Werte $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $z = f(\underline{x})$
- Näherungswerte $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ $\hat{z} = f(\underline{a})$
- Abweichungen $d\underline{x} = \Delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$ $\Delta z = z - \hat{z} = f(\underline{x}) - f(\underline{a})$
 $\Delta z = \Delta f(\underline{a}, d\underline{x})$
- absolute Fehler $|dx_i| = |x_i - a_i|$ $|\Delta z| = |\Delta f(\underline{a}, d\underline{x})|$
- Näherungsweise gilt
$$\Delta z = \Delta f(\underline{a}, d\underline{x}) \approx df(\underline{a}, d\underline{x}) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\underline{a}) dx_i$$

$$\Rightarrow |\Delta z| \leq S \quad \text{mit} \quad S \approx \sum_{i=1}^n |f_{x_i}(\underline{a})| \cdot |dx_i|$$

Bsp: Fehler bei Multiplikation

- $z = f(x, y) = x \cdot y$
- $dz = df = f_x dx + f_y dy = y dx + x dy$
- $\frac{dz}{z} = \frac{df}{xy} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$
- $$\left| \frac{dz}{z} \right| \leq \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{dy}{y} \right| \quad \text{relative Fehler addieren sich}$$

(b) Lineare Approximation von $f(\underline{x})$ für \underline{x} nahe \underline{a}

- bekannt: $f(\underline{a})$, $f_{x_i}(\underline{a})$
- gesucht: $f(\underline{x}) = f(\underline{a} + d\underline{x})$ $d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$
- Dann gilt: $\Delta f(\underline{a}, d\underline{x}) = f(\underline{a} + d\underline{x}) - f(\underline{a}) = f(\underline{x}) - f(\underline{a})$
 $\Rightarrow f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \Delta f(\underline{a}, d\underline{x})$
- Näherungsweise gilt dann:
$$f(\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + df(\underline{a}, d\underline{x}) \quad \text{mit} \quad d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$$

$$f(\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\underline{a}) (x_i - a_i)$$

Bemerkung

Bemerkungen

- $T(\underline{x}) = f(\underline{a}) + df(\underline{a}, d\underline{x})$ mit $d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$ heißt 1. Taylorpolynom von f an der Stelle $\underline{x} = \underline{a}$
- $x_{\text{lin}} = T(\underline{x})$ ist Gleichung des Tangentialraumes von f an d. Stelle $\underline{x} = \underline{a}$

(4) Regeln für das Differential

$$(a) \quad d(\alpha f) = \alpha \cdot df \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$(b) \quad d(f \pm g) = df \pm dg$$

$$(c) \quad d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$$

Beweis von (a)

$$\begin{aligned} d(\alpha \cdot f) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\alpha \cdot f)}{\partial x_i} \cdot dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \\ &= \alpha \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \\ &= \alpha \cdot df \end{aligned}$$

Beweise von (b) und (c) analog mit Hilfe der Summen-, Produktregel für partielle Ableitungen

Bemerkung

Aus (a) und (b) folgt: Das totale Differential ist ein linearer Operator.

3.3 Kettenregel

Gegebene Funktionen

$$\begin{aligned} \bullet f &= f(x_1, \dots, x_n) & \underline{x} &= (x_1, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n \\ \bullet x_1 &= g_1(u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(u_1, \dots, u_m) & \underline{u} &= (u_1, \dots, u_m) \in D' \subseteq \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Verkettete Funktion

$$\begin{aligned} \bullet H(u_1, \dots, u_m) &= f(g_1(u_1, \dots, u_m), \dots, g_n(u_1, \dots, u_m)) \\ H(\underline{u}) &= f(g_1(\underline{u}), \dots, g_n(\underline{u})) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial u_k} = \text{grad } f \cdot \begin{pmatrix} x_{1u_k} \\ \vdots \\ x_{nu_k} \end{pmatrix} = \text{grad } f \cdot \begin{pmatrix} g_{1u_k} \\ \vdots \\ g_{nu_k} \end{pmatrix}$$

(äußere Ableitung \cdot innere Ableitung)

Beispiel 1

$$\begin{aligned} \bullet f(x, y) &= x \cdot y & x &= u+v & y &= u-v \\ \bullet H(u, v) &= f(u+v, u-v) = (u+v) \cdot (u-v) = u^2 - v^2 \\ &\Rightarrow H_u = 2u & H_v &= -2v \\ \bullet \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} &= y \cdot 1 + x \cdot 1 \Big|_{\substack{x=u+v \\ y=u-v}} = u+v + u-v = 2u \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} &= y \cdot 1 + x \cdot (-1) \Big|_{\substack{x=u+v \\ y=u-v}} = u-v - (u+v) = -2v \end{aligned}$$

Beispiel 2

- $f = f(x, y)$
- $x = x(t) \quad y = y(t)$
- $H(t) = f(x(t), y(t))$

$$\Rightarrow H'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{\substack{x=x(t) \\ y=y(t)}}$$

$$= f_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)$$

$$= \text{grad} f(x(t), y(t)) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation

Sind die Fkt $x = x(t) \quad y = y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ stetig,
so beschreibt die Abbildung

$$\underline{r} : t \in I \mapsto \underline{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

eine Kurve in Parameterform bzw eine Bewegung in
der Ebene (Zeitpunkt $t \mapsto$ Ort $\underline{r}(t)$, $I = [a, b]$ Zeitintervall)

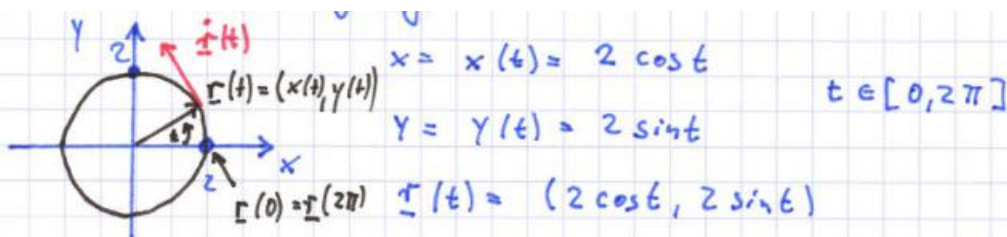
Man nennt $K = \{ \underline{r}(t) \mid t \in I \} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Spur der Kurve.

Weiterhin ist

$$\dot{\underline{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

der Tangentialvektor an die Kurve im Punkt $\underline{r}(t)$ bzw
der Geschwindigkeitsvektor ($\dot{\underline{r}}(t)$ zeigt in Richtung der
Bewegung, $\|\dot{\underline{r}}(t)\| =$ Geschwindigkeit zum Zeitpunkt)

Beispiel Kreisbewegung



- $K = \{ \underline{r}(t) \mid t \in [0, 2\pi] \} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4 \}$
- $\dot{x}(t) = -2 \sin t \quad \dot{y}(t) = 2 \cos t \quad \dot{\underline{r}}(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \quad \|\dot{\underline{r}}(t)\| = 2$
- $\langle \underline{r}(t), \dot{\underline{r}}(t) \rangle = 0 \Rightarrow \underline{r}(t) \perp \dot{\underline{r}}(t)$

Folgerung

Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine diff'bare Fkt und sei $K = \{\underline{r}(t) \mid t \in I\}$
 die Spur der Kurve \underline{r} mit $\underline{r}(t) = (x(t), y(t))$. Für die Fkt

$$h(t) = f(\underline{r}(t)) = f(x(t), y(t))$$

 gilt dann

$$h'(t) = \langle \text{grad } f(\underline{r}(t)), \dot{\underline{r}}(t) \rangle$$

Ist K eine Höhenlinie von f , d.h. es gilt

$$h(t) = c \quad \forall t \in I$$

so ist $h'(t) = 0 \quad \forall t \in I$ und somit ist

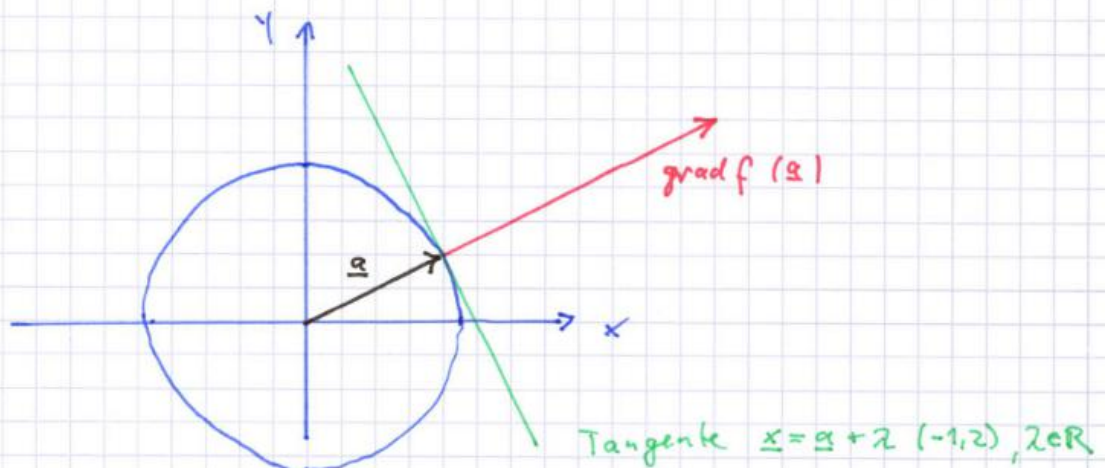
$$\text{grad } f(\underline{r}(t)) \perp \dot{\underline{r}}(t)$$

\Rightarrow

Der Gradientenvektor $\text{grad } f(\underline{a})$ steht im Punkt $\underline{x} = \underline{a}$
 senkrecht auf der Höhenlinie der Fkt. f , die durch
 den Punkt \underline{a} geht. (genauer: \perp auf Tangente an Höhenlinie)

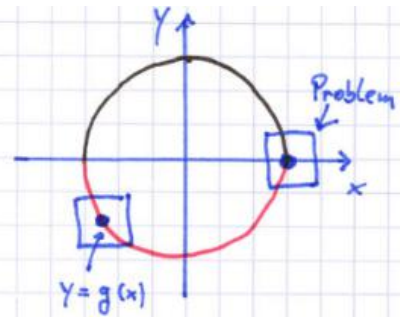
Beispiel

- $f(x, y) = x^2 + y^2$ Höhenlinien $f(x, y) = c$ sind Kreise
- $f_x = 2x \quad f_y = 2y \quad \text{grad } f(x, y) = (2x, 2y)$
- Punkt $\underline{a} = (2, 1) \quad f(2, 1) = 5$
 Höhenlinie $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 5\} = N_5(f) \quad \text{grad } f(\underline{a}) = (4, 2)$



3.4 Implizite Funktionen (Auflösungssatz)

Bsp: $\underbrace{x^2 + y^2 = 4}_{\text{Gleichung}} \Leftrightarrow \underbrace{y = \pm \sqrt{4 - x^2}}_{\text{Auflösung nach } y \text{ nicht eindeutig}}$



Gegeben

- Gleichung $F(x, y) = c$ mit $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $c \in \mathbb{R}$
- eine Lösung $F(x_0, y_0) = c$ $\underline{x_0} = (x_0, y_0) \in D$

Dann gilt

Ist F in einer Umgebung von $\underline{x_0}$ stetig diff'bar und ist $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, so gibt es Intervalle I, J derart, dass

$$\boxed{\forall x \in I \forall y \in J : F(x, y) = c \Leftrightarrow y = g(x)} \quad (*)$$

wobei $g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ eine Fkt. ist. Man sagt dann, dass die Fkt g implizit definiert ist durch die Gleichung $F(x, y) = c$ mit $g(x_0) = y_0$. Für die Ableitung von g an der Stelle $x \in I$ gilt dann

$$g'(x) = - \frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}$$

Beweis der Formel

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow F(x, g(x)) = c \quad \forall x \in I \\ &\Rightarrow 0 = F'(x, g(x)) \\ &\quad = F_x(x, g(x)) \cdot 1 + F_y(x, g(x)) \cdot g'(x) \quad (\text{Kettenregel}) \\ &\Rightarrow g'(x) = - \frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))} \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
 (*) \quad &\Rightarrow F(x, g(x)) = c \quad \forall x \in I \\
 &\Rightarrow 0 = F'(x, g(x)) \\
 &\quad = F_x(x, g(x)) \cdot 1 + F_y(x, g(x)) \cdot g'(x) \quad (\text{Kettenregel}) \\
 &\Rightarrow g'(x) = - \frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}
 \end{aligned}$$

Bemerkung

Bemerkungen • Man kann höhere Ableitungen von g an der Stelle x_0 bestimmen
 \Rightarrow Möglichkeit zur Taylorapproximation von g

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \hookrightarrow \quad &F(x, g(x)) = c \\
 &0 = F_x(x, g(x)) \cdot 1 + F_y(x, g(x)) \cdot g'(x) \quad \rightarrow g'(x) = - \frac{F_x}{F_y} \\
 \frac{d}{dx} \hookrightarrow \quad &0 = F_{xx}(x, g(x)) \cdot 1 + F_{xy}(x, g(x)) \cdot g'(x) + (F_{yx}(x, g(x)) \cdot 1 + F_{yy}(x, g(x)) \cdot g'(x)) \cdot g'(x) \\
 &\quad + F_y(x, g(x)) \cdot g''(x) \\
 &\quad \text{Umstellen nach } g''
 \end{aligned}$$

3.5 Ableitungen höherer Ordnung

$$\text{Fkt } \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$$

(1) Partielle Ableitung k-ter Ordnung

Bsp:

$$f(x, y) = x^2 e^y + x$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y + 1$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y$$

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = 2e^y$$

$$f_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = 2xe^y$$

$$f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = 2xe^y$$

$$f_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial y} = x^2 e^y$$

$$f_{xxx} = 0$$

$$f_{xxy} = 2e^y$$

$$f_{xyx} = 2e^y$$

$$f_{xyy} = 2xe^y$$

$$f_{yxx} = 2e^y$$

$$f_{yxx} = 2e^y$$

$$f_{yxy} = 2xe^y$$

$$f_{yyy} = x^2 e^y$$

Allgemein

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}} := \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\dots \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \dots \right) \right)$$

heißt partielle Ableitung k-ter Ordnung von f nach x_{i_1}, \dots, x_{i_k}
 Dabei gibt \rightarrow die Reihenfolge an. (\rightarrow wird nicht mitgeschrieben)

z.B.: $f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Definition

Die Funktion f heißt k-mal stetig differenzierbar auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, falls für alle $\underline{x} \in D$ sämtliche partiellen Ableitungen von f bis zur k-ten Ordnung existieren und in \underline{x} stetig sind

Satz von Schwarz

Ist f auf der Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen) 2-mal stetig differenzierbar so gilt für alle $\underline{x} \in D$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n$$

(2) Differential k-ter Ordnung

$$\begin{aligned} \bullet df &= f_{x_1} dx_1 + \dots + f_{x_n} dx_n \\ \bullet d^k f &= d(d^{k-1} f) \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df &= df(\underline{x}, d\underline{x}) \\ d^k f &= d^k f(\underline{x}, d\underline{x}) \end{aligned}$$

Beispiel ($n = 2$)

$$\begin{aligned} \bullet f &= f(x, y) \\ \bullet df &= f_x dx + f_y dy \\ \bullet d^2 f &= d(f_x dx + f_y dy) \\ &= d(f_x dx) + d(f_y dy) \quad \text{Summenregel} \\ &= df_x \cdot dx + df_y \cdot dy \quad dx, dy \text{ wie Konstanten} \\ &= (f_{xx} dx + f_{xy} dy) dx + (f_{yx} dx + f_{yy} dy) dy \\ &= f_{xx} (dx)^2 + f_{xy} dy dx + f_{yx} dx dy + f_{yy} (dy)^2 \\ &= (dx, dy) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}}_{\text{Hessematrix } H_f} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) Hessematrix der Fkt f an der Stelle \underline{x}

Eigenschaften

Ist f 2-mal stetig diff'bar auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$,
dann gilt für alle $\underline{x} \in D$:

(a) $H_f(\underline{x}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist symmetrisch (Satz von Schwarz)

(b) $d^2 f(\underline{x}) = d\underline{x}^T H_f(\underline{x}) d\underline{x}$

(c) $f(\underline{x} + d\underline{x}) = f(\underline{x}) + df(\underline{x}, d\underline{x}) + \frac{1}{2} d^2 f(\underline{x}, d\underline{x}) + R(\underline{x}, d\underline{x})$

$$\text{mit } \lim_{\|d\underline{x}\| \rightarrow 0} \frac{R(\underline{x}, d\underline{x})}{\|d\underline{x}\|^2} = 0$$

(4) Quadratische Approximation von $f(\underline{x})$ für \underline{x} nahe \underline{a}

Gegeben $f(\underline{a})$, $\text{grad} f(\underline{a})$, $H_f(\underline{a})$

Gesucht $f(\underline{x})$ für \underline{x} nahe \underline{a}

Lösung Setzen $d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}$ also $\underline{x} = \underline{a} + d\underline{x}$

$\Rightarrow f(\underline{x}) = f(\underline{a} + d\underline{x})$ und für $\|d\underline{x}\|$ nahe 0 gilt näherungsweise

$$f(\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + df(\underline{a}, d\underline{x}) + \frac{1}{2} d^2 f(\underline{a}, d\underline{x})$$

$$f(\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + \langle \text{grad} f(\underline{a}), d\underline{x} \rangle + \frac{1}{2} d\underline{x}^T H_f(\underline{a}) d\underline{x}$$

↑
linearer Zuwachs

↑
quadratischer Zuwachs

$$T_{f,1,\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \text{grad} f(\underline{a}) \cdot (\underline{x} - \underline{a})^T$$

1. Taylorpolynom

$$T_{f,2,\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \text{grad} f(\underline{a}) (\underline{x} - \underline{a})^T + \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{a})^T H_f(\underline{a}) (\underline{x} - \underline{a})$$

2. Taylorpolynom

$$T_{f,n,\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f(\underline{a}, d\underline{x})$$

$(d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a})$

n -tes Taylorpolynom von f
an der Entwicklungsstelle \underline{a}

Anwendung

Ist \underline{a} extremwertverdächtige Stelle von f , so ist $\text{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$

und es gilt $f(\underline{x}) = f(\underline{a} + d\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + \frac{1}{2} d\underline{x}^T H_f(\underline{a}) d\underline{x}$ für \underline{x} nahe \underline{a}

Bsp: $f(x,y) = x e^y - x - y + 1$ $\underline{a} = (1,0)$

• $f(\underline{a}) = 1$ $d\underline{x} = \underline{x} - \underline{a} = (x-1, y-0) = (x-1, y)$

• $f_x = e^y - 1$
 $f_y = x e^{y-1}$ $\Rightarrow \text{grad} f(x,y) = (e^y - 1, x e^{y-1}) \Rightarrow \text{grad} f(\underline{a}) = (0,0)$

$\Rightarrow \underline{a} = (1,0)$ extremwertverdächtig

• $f_{xx} = 0$ $f_{xy} = e^y$
 $f_{yx} = e^y$ $f_{yy} = x e^{y-1}$ $\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & e^y \\ e^y & x e^{y-1} \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

• $T_{f,2,\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \text{grad} f(\underline{a}) d\underline{x}^T + \frac{1}{2} d\underline{x}^T H_f(\underline{a}) d\underline{x} = 1 + (0,0) \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x-1, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$
 $= 1 + \frac{1}{2} (0 \cdot (x-1)^2 + 2(x-1)y + 1 y^2) = 1 + (x-1)y + \frac{1}{2} y^2$

$\Rightarrow f(x,y) \approx 1 + (x-1)y + \frac{1}{2} y^2$ für (x,y) nahe $(1,0)$

$(x,y) = (1,01, 0,01) \Rightarrow f(x,y) \approx 1 + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{100}\right)^2 > 1 = f(\underline{a})$

$(x,y) = (1,01, -0,01) \Rightarrow f(x,y) \approx 1 - \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{100}\right)^2 < 1 = f(\underline{a})$

\underline{a} keine Extremstelle

3.6 Positiv bzw. negativ definite Matrizen

Gegeben

Gegeben

$S = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrische Matrix der Ordnung n

Wir betrachten die quadratische Form $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$q(\underline{x}) = \underline{x} S \underline{x}^T = \sum_{i,j=1}^n s_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

Definition

Falls für alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ aus \mathbb{R}^n gilt

$$\underline{x} \cdot S \underline{x}^T \begin{cases} > 0 \\ \geq 0 \\ < 0 \\ \leq 0 \end{cases} \text{ so nennt man } S \begin{cases} \text{positiv definit} \\ \text{positiv semidefinit} \\ \text{negativ definit} \\ \text{negativ semidefinit} \end{cases}$$

Beobachtung

S ist genau dann negativ (semi)definit wenn
 $-S$ positiv (semi)definit ist.

Eigenwertkriterium

Eigenwertkriterium:

Die symmetrische Matrix S ist $\begin{cases} \text{positiv definit} \\ \text{positiv semidefinit} \\ \text{negativ definit} \\ \text{negativ semidefinit} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{alle EW} > 0 \\ \text{alle EW} \geq 0 \\ \text{alle EW} < 0 \\ \text{alle EW} \leq 0 \end{cases}$

Determinantenkriterium

Es sei $S^{(k)} := \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{k1} & \dots & s_{kk} \end{pmatrix}$ die sogenannte Hauptuntermatrix

k -ter Ordnung (Hauptminor) Dann gilt

(a) S ist positiv definit $\Leftrightarrow \det(S^{(k)}) > 0$ für $k = 1, \dots, n$

(b) S ist negativ definit $\Leftrightarrow \det(S^{(k)}) \begin{cases} < 0 & \text{für ungerade } k \\ > 0 & \text{für gerade } k \end{cases}$

Beispiel

Bsp:

$$S = \begin{pmatrix} \overset{S^{(1)}}{5} & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -1 \\ \underline{2} & -1 & \underline{4} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} S^{(2)} \\ S^{(3)} \end{matrix}$$

- $q(\underline{u}) = \underline{u} \cdot S \underline{u}^T = 5u_1^2 + 6u_2^2 + 4u_3^2 - 4u_1u_2 + 4u_1u_3 - 2u_2u_3$
 - $S^{(1)} = (5) \Rightarrow \det(S^{(1)}) = 5 > 0$
 - $S^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(S^{(2)}) = 30 - 4 = 26 > 0$
 - $S^{(3)} = S \Rightarrow \det(S^{(3)}) = \dots = 83 > 0$
- } $\Rightarrow S$ positiv definit

$$\Rightarrow \forall \underline{u} \neq \underline{0} \in \mathbb{R}^n \quad \text{gilt} \quad q(\underline{u}) > 0$$

4 Extremwerte

4.1 Globale und lokale Extremwerte

Geg:

- Fkt. $x \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$
- Menge $D \subseteq D_f$

Globale Extremwerte von f auf D

Suchen $\max \{f(x) \mid x \in D\}$ bzw. $\min \{f(x) \mid x \in D\}$ sofern diese Werte existieren. Ist $a \in D$ und gilt

$$f(a) = \max \{f(x) \mid x \in D\} \quad \text{bzw.} \quad f(a) = \min \{f(x) \mid x \in D\}$$

so heißt

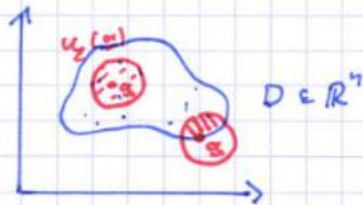
- $x = a$ globale Maximalstelle bzw. globale Minimalstelle von f auf D
- $f(a)$ globales Maximum bzw. globales Minimum von f auf D

Lokale Extremwerte von f auf D

Man nennt $x = a$ lokale Maximalstelle bzw. lokale Minimalstelle von f auf D , falls es eine Umgebung $U_\varepsilon(a)$ gibt, mit

$$f(a) = \max \{f(x) \mid x \in U_\varepsilon(a) \cap D\} \quad \text{bzw.} \quad f(a) = \min \{f(x) \mid x \in U_\varepsilon(a) \cap D\}$$

Dabei ist $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \varepsilon\}$



4.2 Existenz globaler Extremwerte

Definition

Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt
falls $\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in D: \|x\| < K$

Satz von Weierstraß (ohne Beweis)

Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Fkt. und $D \subseteq D_f$ eine abgeschlossene und beschränkte Menge. Dann besitzt f auf D ein globales Maximum und ein globales Minimum.
d.h. $\exists a, b \in D$ mit

- $\forall x \in D: f(a) \leq f(x) \leq f(b)$
- $f(a) = \min \{f(x) \mid x \in D\}$
- $f(b) = \max \{f(x) \mid x \in D\}$

a und b sind dann lokale Extremstellen im Inneren von D oder liegen auf dem Rand.

4.3 Lokale Extremwerte im Inneren von D

(1) Notwendige Bedingung

Voraussetzung

- f stetig diff'bar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\underline{a} \in D$ sei innerer Punkt von D

Dann gilt:

\underline{a} lokale Extremstelle von f auf $D \Rightarrow \text{grad } f(\underline{a}) = \underline{0}$, d.h. $\forall i: f_{x_i}(\underline{a}) = 0$

Ist $\text{grad } f(\underline{a}) = \underline{0}$ so gilt näherungsweise

$$f(\underline{a} + d\underline{x}) \approx f(\underline{a}) + \underline{0} \cdot d\underline{x}^T + \frac{1}{2} d\underline{x}^T H_f(\underline{a}) d\underline{x}$$

woraus folgt

(2) Hinreichende Bedingung

Voraussetzung

- f 2x stetig diff'bar auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\underline{a} \in D$ innerer Punkt
- $\text{grad } f(\underline{a}) = \underline{0}$ d.h. \underline{a} ist extremwertverdächtig

Dann gilt

- a) $H_f(\underline{a})$ positiv definit $\Rightarrow \underline{a}$ ist lokale Minimalstelle von f auf D
b) $H_f(\underline{a})$ negativ definit $\Rightarrow \underline{a}$ ist lokale Maximalstelle von f auf D

Spezialfall ($n=2$) $f = f(x, y)$

- f 2x stetig diff'bar auf $D \subseteq \mathbb{R}^2$
- $\underline{a} \in D$ innerer Punkt mit $\text{grad } f(\underline{a}) = \underline{0}$
- $H_f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\underline{a}) & f_{xy}(\underline{a}) \\ f_{yx}(\underline{a}) & f_{yy}(\underline{a}) \end{pmatrix}$

und es gilt:

a) $\left. \begin{matrix} \det(H_f(\underline{a})) > 0 \\ f_{xx}(\underline{a}) > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow H_f(\underline{a}) \text{ positiv definit} \Rightarrow \underline{a} \text{ ist lokale Minimalstelle}$

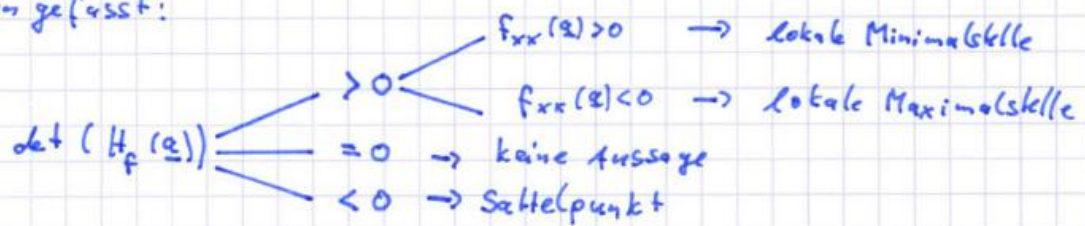
b) $\left. \begin{matrix} \det(H_f(\underline{a})) > 0 \\ f_{xx}(\underline{a}) < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow H_f(\underline{a}) \text{ negativ definit} \Rightarrow \underline{a} \text{ ist lokale Maximalstelle}$

c) $\det(H_f(\underline{a})) < 0 \Rightarrow H_f(\underline{a}) \text{ indefinit} \Rightarrow \underline{a} \text{ keine Extremstelle}$

d) $\det(H_f(\underline{a})) = 0 \Rightarrow \text{keine Aussage}$ (Sattelpunkt)

Zusammengefasst

Zusammengefasst:



Beispiel

• $f(x,y) = xy - x^3 - y^3$ $D = \mathbb{R}^2$ Rand $\partial D = \emptyset \Rightarrow$ offen und abgeschlossen

• Notwendige Bedingung

I $f_x(x,y) = y - 3x^2 \stackrel{!}{=} 0$

II $f_y(x,y) = x - 3y^2 \stackrel{!}{=} 0$

$\stackrel{\text{I}}{\Rightarrow} y = 3x^2 \stackrel{\text{in II}}{\Rightarrow} x - 3 \cdot 9x^4 = 0 \Leftrightarrow x \cdot (1 - 27x^3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } \frac{1}{3}$

Lösungen:

$(x_1, y_1) = (0, 0) =: \underline{a}$ $(x_2, y_2) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) =: \underline{b}$ extremwertverdächtig

• Hinreichende Bedingung

$$\left. \begin{array}{ll} f_{xx}(x,y) = -6x & f_{xy}(x,y) = 1 \\ f_{yx}(x,y) = 1 & f_{yy}(x,y) = -6y \end{array} \right\} \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 1 & -6y \end{pmatrix}$$

a) $H_f(\underline{a}) = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(H_f(\underline{a})) = -1 < 0 \Rightarrow \underline{a}$ ist Sattelpunkt
(keine Extremstelle)

b) $H_f(\underline{b}) = H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} \det H_f(\underline{b}) = 3 > 0 \\ f_{xx}(\underline{b}) = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{b} \text{ ist lokale Maximalstelle von } f$$

$$f(\underline{b}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} = \frac{1}{27}$$

4.4 Extremwerte mit (Gleichungs-) Nebenbedingung

(1) Aufgabenstellung

Gegeben

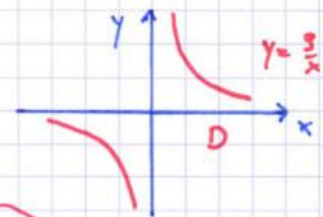
- Fkt $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Zielfunktion
- Fkt $g: D_g \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$D = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\underline{x}) = 0 \}$$

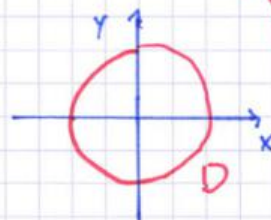
Gesucht Lokale bzw globale Extremwerte von f auf D
kurz: Extremwerte von f mit Nebenbedingung $g(\underline{x}) = 0$

Beispiele ($n=2$)

a) $f(x,y) = x+y$ mit $x \cdot y = 3$ (d.h. $g(x,y) = 3 - xy$)



b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$ ($g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$)



(2) Eigenschaften von $D = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\underline{x}) = 0 \}$

Ist g stetig diff'bar auf \mathbb{R}^n und $\text{grad } g(\underline{x}) \neq 0$ für $\underline{x} \in D$, dann gilt

(a) D hat keine inneren Punkte, d.h. $\partial D = D$

(b) D ist abgeschlossen

(c) Ist D beschränkt (d.h. $\|\underline{x}\| < K$ für alle $\underline{x} \in D$ und ein $K \in \mathbb{R}$)
dann besitzt f auf D ein globales Maximum und
ein globales Minimum.

(3) Lösungsmethode für (1)

(a) Auflösung der Gleichung $g(\underline{x}) = 0$

- Lösen Gleichung $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ nach einer Variablen auf etwa $x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$
- Einsetzen in Zielfunktion ergibt neue Fkt. \tilde{f} aus \mathbb{R}^{n-1} in \mathbb{R} mit $\tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$
- Ist dann (x_1, \dots, x_{n-1}) lokale Extremstelle von \tilde{f} so ist $(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$ lokale Extremstelle von f mit NB $g(x) = 0$

Beispiel

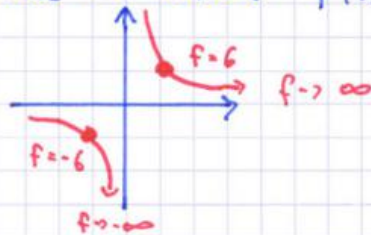
Beispiel $f(x, y) = x + y$ NB $xy = 9$

- auflösen $y = \frac{9}{x} \quad x \neq 0$
- einsetzen $\tilde{f}(x) = x + \frac{9}{x} \quad \tilde{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- $\tilde{f}'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$
- $\tilde{f}''(x) = \frac{18}{x^3}$
- $\tilde{f}''(-3) = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow x = -3$ lok. Maximalstelle von \tilde{f} ($y = \frac{9}{x} = -3$)
- $\tilde{f}''(3) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow x = 3$ lok. Minimalstelle von \tilde{f} ($y = \frac{9}{x} = 3$)

\Rightarrow lokale Extremstellen von $f(x)$ mit NB $g(x) = 0$

$(x, y) = (-3, -3)$ lok. Maximalstelle $f(-3, -3) = -6$ lokales Maximum

$(x, y) = (3, 3)$ lokale Minimalstelle $f(3, 3) = 6$ lokales Minimum



- f hat auf D keine globalen Extremwerte

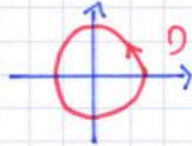
(b) Parametrisierung der Menge $D = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$

Beispiel

Beispiel

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \text{ mit } x^2 + y^2 = 1$$

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \} = \{ (x, y) \mid x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi] \}$$



Betrachten $\tilde{f} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t$

$$\tilde{f}'(t) = -2 \cos t \sin t - 2 \sin t \cos t = -4 \cos t \sin t \stackrel{!}{=} 0$$

$$\tilde{f}'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi \text{ oder } 2\pi$$

Rand ist $t = 0$ oder $t = 2\pi$

$$\tilde{f}(0) = f(1, 0) = 1, \quad \tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0, 1) = -1, \quad \tilde{f}(\pi) = f(-1, 0) = 1, \quad \tilde{f}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$$

$$\Rightarrow \max \{ f(x) \mid x \in D \} = \max \{ \tilde{f}(t), t \in [0, 2\pi] \} = 1 \quad \text{für } (x, y) = (1, 0) \text{ oder } (x, y) = (-1, 0)$$

$$\min \{ f(x) \mid x \in D \} = \min \{ \tilde{f}(t), t \in [0, 2\pi] \} = -1 \quad \text{für } (x, y) = (0, 1) \text{ oder } (x, y) = (0, -1)$$

(c) Multiplikatorenregel von Lagrange

1. Betrachten Ersatzfunktion

1. Betrachten Ersatzfunktion

L aus \mathbb{R}^{n+1} in \mathbb{R}

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) := f(x_1, \dots, x_n) + \lambda \cdot g(x_1, \dots, x_n)$$

\uparrow
Zielfunktion

\uparrow
NB $g(x) = 0$

L heißt Lagrange-Funktion und λ Lagrange-Multiplikator

2. Notwendige Bedingung

Bestimmen extremwertverdächtige Stellen $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ von L , d.h. die Lösungen von $\text{grad } L = 0$, d.h.

$$L_{x_1} = f_{x_1} + 2g_{x_1} \stackrel{!}{=} 0$$

\vdots

$$L_{x_n} = f_{x_n} + 2g_{x_n} \stackrel{!}{=} 0$$

$$L_\lambda = g \stackrel{!}{=} 0$$

Dann sind die (x_1, \dots, x_n) extremwertverdächtige Stellen von f mit NB $g(x) = 0$. Weitere extremwertverdächtige Stellen gibt es nicht.

Vor: $\text{grad } g(x) \neq 0$ für alle x mit $g(x) = 0$

3. Hinreichende Bedingung (zu kompliziert)

Beispiel

Beispiel $f(x,y) = x^2 - y^2$ NB $x^2 + y^2 = 1$ $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2 = 0$

- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ abgeschlossen und beschränkt
- f stetig auf D $\xrightarrow{\text{Weierstraß}} \exists$ glob. Maximum und glob. Minimum
- $\text{grad } g(x) = (-2x, -2y) \neq (0,0) \quad \forall (x,y) \in D$
- $L(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 + 2(1 - x^2 - y^2)$

\Rightarrow notwend. Bedingung

$$\text{I} \quad L_x = 2x - 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(1-\lambda) = 0$$

$$\text{II} \quad L_y = -2y - 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2y(1+\lambda) = 0$$

$$\text{III} \quad L_\lambda = 1 - x^2 - y^2 \stackrel{!}{=} 0$$

I Fall 1: $x = 0$

$$\text{II} \Rightarrow y = 0 \quad (\text{Widerspruch zu III}) \quad \text{oder} \quad \lambda = -1$$

$$\text{III} \Rightarrow y = \pm 1 \quad \text{also} \quad (x,y) = (0,1) \text{ oder } (0,-1) \quad \lambda = -1$$

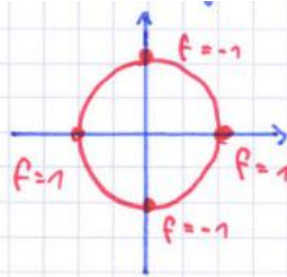
Fall 2 $x \neq 0$ $\text{I} \Rightarrow \lambda = 1$ $\text{II} \Rightarrow y = 0$ $\text{III} \Rightarrow x = \pm 1$

$$\text{also} \quad (x,y) = (1,0) \text{ oder } (-1,0) \quad \lambda = 1$$

Extremwertverdächtige Stellen von f mit NB $g(x) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} (x,y) = (1,0) \\ (x,y) = (-1,0) \end{array} \right\} f(x,y) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} (x,y) = (0,1) \\ (x,y) = (0,-1) \end{array} \right\} f(x,y) = -1$$



f hat auf $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$ glob. Max und Min. Kann nur an einem der 4 Punkte passieren

$\Rightarrow f(1,0) = f(-1,0) = 1$ globales Maximum von f auf D

$f(0,1) = f(0,-1) = -1$ globales Minimum von f auf D

(4) Mehrere Nebenbedingungen

Geg: Ziel fkt. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 • NB $g_1(x) = 0, \dots, g_p(x) = 0$ ($p < n$, $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$)

Ges: Extremwerte von f auf $D = \{x \in \mathbb{R}^n | g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$

Lagrange - Funktion

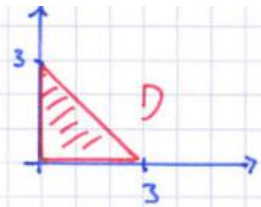
Vorgehensweise analog zu d), d.h.

Lösungen von $L_{x_1} = L_{x_2} = \dots = L_{x_n} = L_{\lambda_1} = \dots = L_{\lambda_p} = 0$ sind extremwertverdächtig

4.5 Globale Extremwerte von f auf D

Geg:

- Zielfunktion $f(x,y) = xy$
- Menge $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x,y \wedge x+y \leq 3\}$



Ges:

- globale Extremwerte von f auf D

Lösung

- a) $\left. \begin{array}{l} D \text{ abgeschlossen und beschränkt} \\ f \text{ stetig auf } D \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \text{ globale Extremwerte auf } D$
- Jede globale Extremstelle von f auf D ist lokale Extremstelle von f auf D
- b) innere Punkte
- notw. Bed. $\left. \begin{array}{l} f_x = y \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y = x \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x,y) = (0,0) \text{ kein innerer Punkt von } D$
- $\Rightarrow f$ hat in $\text{int}(D)$ keine lokalen also auch keine globalen Extremstellen

c) Rand ∂D von D

- $D_1 = \{(x,y) \in \partial D \mid x=0 \text{ oder } y=0\}$
 $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x,y) = 0 \\ f(x,y) \geq 0 \forall x \in D \end{array} \right\} \Rightarrow f=0 \text{ globales Minimum von } f \text{ auf } D, \text{ alle } (x,y) \in D_1 \text{ globale Minimalstellen}$
- $D_2 = \{(x,y) \in \partial D \mid x,y > 0\} = \{(x,y) \mid 0 < x < 3, y = 3-x\}$
 $\tilde{f}(x) = f(x, 3-x) = x(3-x) = 3x - x^2$
 $\tilde{f}'(x) = 3 - 2x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \quad (y = 3-x = \frac{3}{2})$
 $\tilde{f}''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \tilde{f}(\frac{3}{2}) < 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ lok. Maximalstelle von } \tilde{f}$
 $\Rightarrow (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \text{ lokale Maximalstelle von } f \text{ auf } D$

d) Auswertung

- lokale Minimalstellen von f auf D höchstens Punkte aus D_1
 - lokale Maximalstellen von f auf D höchstens in $(x,y) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$
- $\Rightarrow f=0$ globales Minimum globale Minimalstellen $= D_1$
 $f = \frac{9}{4} = f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ globales Maximum globale Maximalstelle $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

Kapitel V: Gewöhnliche Differentialgleichung

1. Grundbegriffe

1.1 Ableitung einer Funktion

• Funktion

$$y: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$I = [a, b]$$

$$y = y(t)$$

• Ableitung

$$y': I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y' = y'(t)$$

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

• Tangente

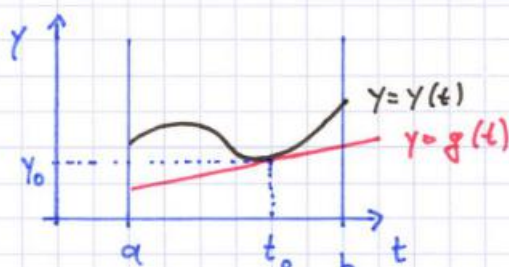
Punkt $t_0 \in I$

$$y(t_0) = y_0$$

$$y'(t_0) = y_1$$

$$g(t) = y_0 + y_1(t - t_0)$$

$$\Rightarrow g'(t) = y_1 \quad g(t_0) = y_0 = y(t_0)$$



• $y'(t)$ Anstieg, Zuwachs, Geschwindigkeit zum ZP t

• $y''(t)$ Beschleunigung zum ZP t

Problem: y unbekannt, Zusammenhang zwischen
 $y, y', y'' \dots$ bekannt

1.2 Wachstum der Erdbevölkerung

- $y(t)$ = Bevölkerung der Erde in Mrd. zum ZP t
in Jahren $t \in I = (-\infty, \infty)$
- $y(0) = 7,8$ (7,8 Mrd. Menschen zum ZP 0, Juni 2020)
- Modell für das Bevölkerungswachstum:
Zuwachs y' proportional zur Bevölkerung y
also $y'(t) = a \cdot y(t)$ mit $a > 0$
Sehr einfaches Modell (zu einfach)

\Rightarrow Gesucht ist eine Funktion $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$y'(t) = a \cdot y(t) \quad \text{und} \quad y(0) = 7,8$$

\uparrow
gewöhnliche
Differentialgleichung

\uparrow
Anfangsbedingung

- $y(t) = e^{at}$ $y'(t) = a \cdot e^{at}$ $y(0) = 1$
 \uparrow \uparrow
DGL erfüllt Anfangsbed. nicht erfüllt
- $y(t) = 7,8 e^{at}$ $y'(t) = a \cdot 7,8 e^{at}$ $y(0) = 7,8$
 \uparrow \uparrow
DGL erfüllt Anfangsbed. erfüllt

ist die einzige Lösung

- Bestimmung von a

Alle 50 Jahre verdoppelt sich die Erdbevölkerung

$$\Rightarrow y(50) = 15,6$$

$$\Rightarrow 7,8 \cdot e^{a \cdot 50} = 15,6$$

$$\Rightarrow e^{a \cdot 50} = 2$$

$$\Rightarrow a = \frac{\ln 2}{50} \approx 0,01386$$

$$\Rightarrow y(t) = 7,8 \cdot e^{\frac{\ln 2}{50} t}$$

$$y(0) = 7,8$$

$$y(1) \approx 7,9$$

$$y(20) \approx 10,3$$

$$y(30) \approx 11,8$$

1.3 Definition

(a) Eine Gleichung der Form

$$F(t, y, y', y'', \dots) = 0 \quad (*)$$

für eine Fkt. $y = y(t)$ heißt gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) für $y = y(t)$

(b) Die höchste auftretende Ableitungsordnung von y heißt Ordnung der DGL

(c) Eine Fkt. $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall heißt explizite Lösung der DGL (*), falls y auf I n -mal differenzierbar ist (n = Ordnung) und falls für alle Argumente $t \in I$ gilt:

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

Beispiel

(a) $y' = e^t$ DGL 1. Ordnung für $y = y(t)$

Lösung $y = \int y' dt = \int e^t dt = e^t + c \quad c \in \mathbb{R}$

\Rightarrow $y = e^t + c, c \in \mathbb{R}$ Kurvenschar

Funktionsschar $y = y(t, c)$ ergibt für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine explizite Lsg.

(b) $y'' = e^t$ DGL 2. Ordnung für $y = y(t)$

Lösung $y' = \int y'' dt = \int e^t dt = e^t + c_1$

$$y = \int y' dt = \int e^t + c_1 dt = e^t + c_1 t + c_2$$

\Rightarrow $y = e^t + c_1 t + c_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Kurvenschar $y = y(t, c_1, c_2) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Bezeichnung (sezielle Lösung | allgemeine Lösung)

Lösung $y = y(t)$ einer
DGL n -ter Ordnung

Spezielle Lösung

$y = y(t)$ ist konkrete

Fkt. ohne frei wählbare

Konstante

Bsp: $y(t) = e^t + 17t + 42$

allgemeine Lösung

$y = y(t, c_1, \dots, c_n)$ ist

Kurvengchar mit n frei

wählbaren Konstanten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

(Bsp: $y(t) = e^t + c_1 t + c_2$ (n=2))

1.4 Anfangswertproblem (AWP) n-ter Ordnung

Gesucht sind alle Fkt $y=y(t)$ $t \in I$ mit

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

DGL n-ter Ordnung

und

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

} n Anfangsbedingungen
für $y=y(t)$ an
der Stelle $t_0 \in I$

Beispiel

$$\text{DGL: } y'' = e^t, \quad y=y(t)$$

$$\text{AB: } y(0)=2, \quad y'(0)=1$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ allg. Lsg. der DGL: } y(t) &= e^t + c_1 t + c_2 \\ &\Rightarrow y'(t) = e^t + c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet y(0) &= e^0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \stackrel{!}{=} 2 \Rightarrow 1 + c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 1 \\ y'(0) &= e^0 + c_1 \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow 1 + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{AWP hat die Lösung } y_{\text{AWP}}(t) = e^t + 1$$

Bemerkung

Ein AWP besitzt (bei uns) meist genau eine Lsg.

2. Gewöhnliche DGL en 1. Ordnung

2.1 Explizite DGL 1. Ordnung

Betrachten eine explizite DGL 1. Ordnung der Form

$$\boxed{y' = f(t, y)} \quad (*)$$

für die Funktion $y = y(t)$ sowie ein Rechteck $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form

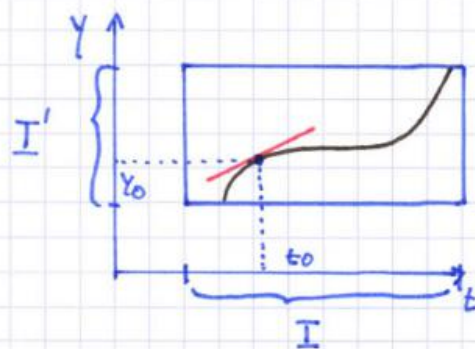
$$D = \{ (t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I, y \in I' \}$$

Bemerkung

Ist $y = y(t)$ Lösung von (*) mit $y(t_0) = y_0$, so gilt

$$y'(t_0) = f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, y_0)$$

d.h. $f(t_0, y_0)$ gibt den Anstieg der Lösungskurve im Punkt (t_0, y_0) an



Lösungskurve $y = y(t)$

mit $y(t_0) = y_0$

$f(t_0, y_0)$ = Anstieg der Tangenten

$$\Rightarrow T(t) = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot (t - t_0)$$

Gleichung der Tangenten

\Rightarrow Näherungslösung bestimmbar

Eulersches Polygonzugverfahren mit Schrittweite h

geg. AWP

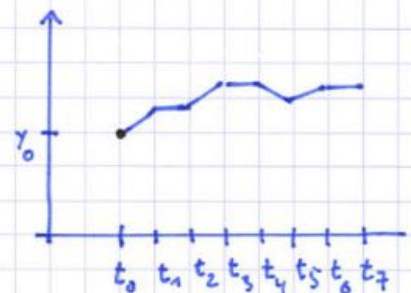
$$y' = f(t, y)$$

$$y(t_0) = y_0$$

Für $i = 0 \dots m$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) \cdot h$$



Existenz von Lösungen (Hinreichende Bedingung)

Satz (Peano)

Ist f stetig auf D , so verläuft durch jeden inneren Punkt $(t_0, y_0) \in D$ mindestens eine Lösung von (*), d.h. das AWP

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

hat wenigstens eine Lösung $y = y(t)$ die nach beiden Seiten bis zum Rand von D verläuft.

Eindeutigkeit der Lösung (Hinreichende Bedingung)

Ist sowohl f als auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig auf D , so verläuft durch jeden inneren Punkt $(t_0, y_0) \in D$ genau eine Lösung, die nach beiden Seiten bis zum Rand verläuft.

Beispiel 1

Beispiel 1 $y' = 2\sqrt{y} \quad y(1) = 1$

• $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, 0 \leq y \leq c\}$

• f stetig auf D $f_y = \frac{1}{\sqrt{y}}$ unstetig in $(t, 0)$

• AWP $y' = 2\sqrt{y} \quad y(1) = 1 \quad (t_0, y_0) = (1, 1)$ innerer Punkt

• Lsg: $y_1(t) = t^2 \quad t \geq 0$

$$y_2(t) = \begin{cases} t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Probe $y_1'(t) = 2t \quad y_1(1) = 1$

$$2\sqrt{y_1(t)} = 2t \quad \forall t \geq 0$$

$$y_2'(t) = \begin{cases} 2t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$2\sqrt{y_2(t)} = y_2'(t) \quad \forall t$$

Beispiel 2

$$y' = 2\sqrt{|y|} \quad y(0) = 0$$

$$\bullet D = \{(t, y) \mid -a \leq t \leq a, -b \leq y \leq b\} \quad (\text{oder } D = \mathbb{R}^2)$$

$$\text{Lösung} \bullet Y_c(t) = \begin{cases} (t-c)^2 & t \geq c \\ 0 & t < c \end{cases} \Rightarrow Y_c'(t) = \begin{cases} 2(t-c) & t \geq c \\ 0 & t < c \end{cases}$$

$$Y_c'(t) = 2\sqrt{|Y_c(t)|}$$

$$Y_c(0) = 0 \text{ für } c > 0$$

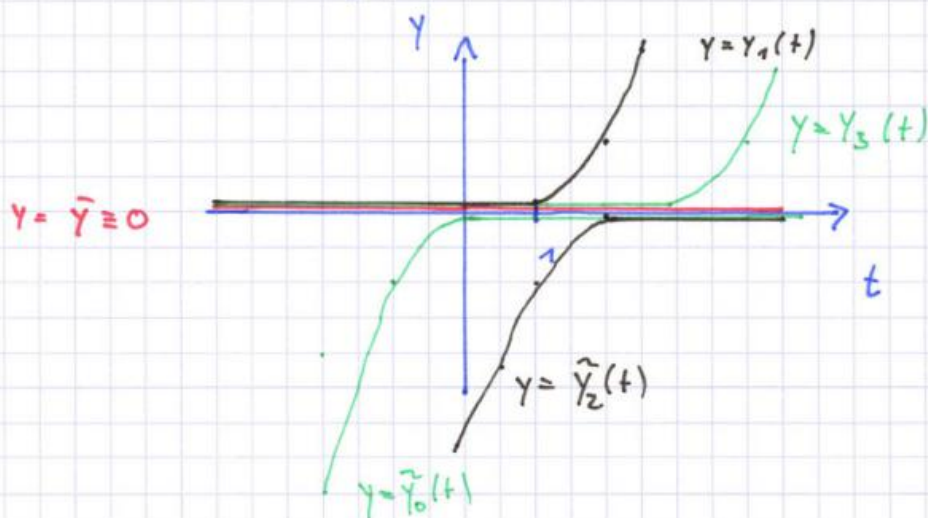
$$\bar{Y}(0) = 0$$

$$\bullet \bar{Y}(t) \equiv 0$$



$$\bullet \tilde{Y}_c(t) = \begin{cases} -(t-c)^2 & t \leq c \\ 0 & t > c \end{cases} \Rightarrow \tilde{Y}_c'(t) = \begin{cases} -2(t-c) & t \leq c \\ 0 & t > c \end{cases}$$

$$2\sqrt{|\tilde{Y}_c(t)|} = \begin{cases} 2|t-c| & t \leq c \\ 0 & t > c \end{cases} = \begin{cases} -2(t-c) & t \leq c \\ 0 & t > c \end{cases}$$



$$y' = 2\sqrt{|y|}$$

2.2 Spezielle Typen von DGL 1. Ordnung

(I) DGL mit getrennten Variablen

Normalform

Normalform

$$y' = g(t) \cdot h(y) \quad (t, y) \in D$$

(1) Nullstellen von h bestimmen

Ist $h(y_0) = 0$, so ist $y = y_0$ eine spezielle Lösung der DGL (konstante Lösung)

(2) Trennung der Variablen zur Bestimmung der restlichen Lösungen ($h(y) \neq 0$)

$$\frac{1}{h(y)} \cdot y' = g(t)$$

$$\int \underbrace{\frac{1}{h(y)}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{y'}_{\text{innere Ableitung}} dt = \int g(t) dt$$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t) dt$$

Umkehrung
der
Kettenregel

Ausrechnen und nach y auflösen

Kurzform für (2)

$$y' = \frac{dy}{dt} = g(t) \cdot h(y)$$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t) dt \quad \text{fertig}$$

Beispiel 1

- $y' = y \cdot \cos t \quad (t, y) \in \mathbb{R}^2$
- $h(y) = y \quad g(t) = \cos t$
- $h(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow$ spezielle Lösung $y(t) \equiv 0 \quad t \in \mathbb{R}$
- Im Folgenden $y \neq 0 \Rightarrow h(y) \neq 0$
 $y' = \frac{dy}{dt} = y \cos t$
 $\int \frac{1}{y} dy = \int \cos t dt$
 $\ln |y| = \sin t + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$

$$\Rightarrow |y| = e^{\sin t + C_1}$$

$$|y| = e^{\sin t} \cdot \underbrace{e^{C_1}}_{>0}$$

$$y = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{=: c_2 \neq 0} \cdot e^{\sin t}$$

$$y = c_2 e^{\sin t} \quad c_2 \in \mathbb{R} \quad c_2 \neq 0$$

- Zusammen mit Sonderlösung $y \equiv 0$ ergibt sich als allgemeine Lösung $y = y(c, t)$

$$\underline{y = c \cdot e^{\sin t}} \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

- Anfangswertproblem $y' = y \cdot \cos t \quad y(0) = -4$
allg. Lsg der DGL: $y(t) = c e^{\sin t}$
Anfangsbedingung $-4 = y(0) = c \cdot e^{\sin 0} = c$
 \Rightarrow $y_{\text{AWP}}(t) = -4 e^{\sin t} \quad t \in \mathbb{R}$

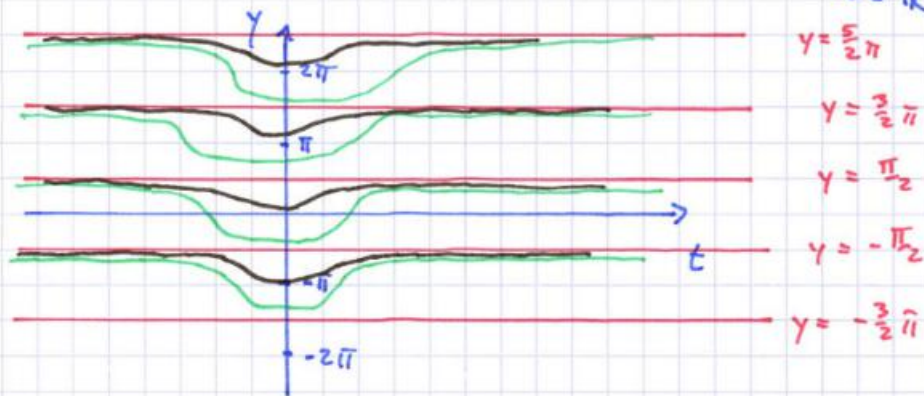
Bemerkung

- $y' = f(t, y) = y \cdot \cos t \quad f_y = \cos t$
- f und f_y stetig auf $D = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Durch jeden Punkt $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ verläuft genau 1 Lsg der DGL
 \Rightarrow AVP $y' = y \cdot \cos t \quad y(t_0) = y_0$ hat genau 1 Lsg.

Beispiel 2

- $y' = \cos^2 y \cdot t$ $h(y) = \cos^2 y$ $g(t) = t$
- $f_y = -2 \cos y \sin y \cdot t \Rightarrow f, f_y$ stetig auf $D = \mathbb{R}^2$
 \Rightarrow jedes AWP eindeutig lösbar
- $h(y) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 y = 0 \Leftrightarrow \cos y = 0 \Leftrightarrow y = (2k+1) \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$
 \Rightarrow konstante Sonderlösungen $y = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} + k\pi}}$
- restliche Lösung $\frac{dy}{dt} = \cos^2 y \cdot t$
 $\int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int t dt$
 $\tan y = \frac{1}{2} t^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y_l(t) = \arctan\left(\frac{1}{2} t^2 + c\right) + l \cdot \pi \quad l \in \mathbb{Z} \quad c \in \mathbb{R}$$



(II) Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Normalform

Normalform: $y' = h\left(\frac{y}{t}\right) \quad (t, y) \in D \quad t \neq 0$

Bsp: a) $y' = \frac{t^2 + y^2}{ty} = \frac{t^2 (1 + \frac{y^2}{t^2})}{t^2 (\frac{y}{t})} = \frac{1 + \frac{y^2}{t^2}}{\frac{y}{t}} \Rightarrow h(z) = \frac{1+z^2}{z}$

b) $y' = \frac{t^2 y + y^3}{t^2 y^2} = \frac{t^3 (\frac{y}{t} + \frac{y^3}{t^3})}{t^3 (\frac{y^2}{t})} = \frac{\frac{y}{t} + (\frac{y}{t})^3}{\frac{y^2}{t^2}}$ keine Ähnlichkeits-DGL

c) $y' = \frac{y}{t} \cdot \cos \frac{y}{t} \Rightarrow h(z) = z \cdot \cos z$

Lösungsalgorithmus

1. Schritt

Substitution	$z = \frac{y}{t}$	$y = y(t)$
Rücksubstitution	$y = z \cdot t$	$z = z(t)$
Ableitung	$y' = z' \cdot t + z$	Produktregel

2. Schritt

Einsetzen in Ausgangsgleichung

$$y' = h\left(\frac{y}{t}\right)$$

ergibt DGL für $z = z(t)$

$$z' \cdot t + z = h(z)$$

$$z' = \frac{1}{t} (h(z) - z)$$

\Rightarrow DGL mit getrennten Variablen. Bestimmen $z = z(t)$ und erhalten durch Rücksubst. $y = tz$ Lösungen der Original DGL

Beispiel

Beispiel :

$$y' = \frac{t^2 + y^2}{t \cdot y} = \frac{1 + \frac{y^2}{t^2}}{\frac{y}{t}} \quad t, y \neq 0$$

1. Schritt

$$z = \frac{y}{t} \quad y = tz \quad y' = z + t z'$$

2. Schritt

Einsetzen in Ausgangs-DGL

$$z + t z' = \frac{1 + z^2}{z} = \frac{1}{z} + z$$

$$\Rightarrow z' = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{z}$$

$g(t) \quad h(z)$

$h(z)$ hat keine NS

\Rightarrow keine Sonderlösung

$$\int z dz = \int \frac{1}{t} dt$$

$$\frac{1}{2} z^2 = \ln|t| + C$$

$$z^2 = 2 \ln|t| + 2C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$z = \pm \sqrt{\ln t^2 + 2C}$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{y = tz = \pm t \sqrt{\ln t^2 + 2C}}}$$

(III) Exakte DGL

Betrachten DGL 1. Ordnung für Fkt $y=y(x)$ der Form

$$\boxed{\begin{aligned} P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' &= 0 \\ P(x,y) dx + Q(x,y) dy &= 0 \end{aligned}} \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad (*)$$

Voraussetzung

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei Rechteck. Die Fkt. $P=P(x,y)$ und $Q=Q(x,y)$ seien stetig diff'bar auf D

Definition

DGL (*) heißt exakte DGL auf D , falls es eine Funktion $F=F(x,y)$ gibt mit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

für alle $(x,y) \in D$.

Dann gilt für das Differential von F

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = P dx + Q dy$$

und man nennt F Stammfunktion von (P,Q) auf D .

$$\text{grad } F = (P, Q)$$

Allgemeine Lösung von (*)

Ist (*) eine exakte DGL und F eine Stammfunktion von (P,Q) , so erhalten wir aus der DGL (*)

$$\forall (x,y) \in D: dF = P dx + Q dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y) = c \quad c \in \mathbb{R}$$

Die Kurvenschar

$$\boxed{F(x,y) = c \quad c \in \mathbb{R}}$$

ist damit die Lösung von (*) in impliziter Form.

Integrabilitätsbedingung

Die DGL (*) $Pdx + Qdy = 0$ ist genau dann eine exakte DGL, wenn für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Bestimmung einer Stammfunktion F

Bestimmungsgleichung $F_x = P$ $F_y = Q$

• $F_x = P \Rightarrow F = \int F_x dx = \int P(x,y) dx = \tilde{P}(x,y) + c(y)$

• $F_y = Q \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{P}(x,y) + c(y)) = Q(x,y)$ mit $\tilde{P}_x = P$
 $\tilde{P}_y + c'(y) = Q$

\Rightarrow Gleichung für $c' \Rightarrow c(y) = \int c'(y) dy$

$\Rightarrow F$ bestimmt

Beispiel

Beispiel

DGL für $y=y(x)$: $y' = -\frac{2x+3\cos y}{2y-3x\sin y}$ $y=y(x)$ $y' = \frac{dy}{dx}$

umformen

$$2x+3\cos y + (2y-3x\sin y) y' = 0$$

$$\underbrace{(2x+3\cos y)}_P dx + \underbrace{(2y-3x\sin y)}_Q dy = 0$$

Integrabilitätsbedingung

$$\left. \begin{array}{l} P_y(x,y) = -3\sin y \\ Q_x(x,y) = -3\sin y \end{array} \right\} \Rightarrow P_y(x,y) = Q_x(x,y) \quad \forall (x,y) \in D = \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow Pdx + Qdy$ ist exakte DGL auf $D = \mathbb{R}^2$

Stammfunktion $F = F(x,y)$

- $F_x = P = 2x+3\cos y$ $F_y = Q = 2y-3x\sin y$
- $F = \int F_x dx = \int (2x+3\cos y) dx = x^2 + 3x\cos y + c(y)$
- $F_y = -3x\sin y + c'(y) \stackrel{!}{=} Q(x,y) = 2y-3x\sin y$
 $\Rightarrow c'(y) = 2y \Rightarrow c(y) = \int 2y dy = y^2 + \tilde{c} \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x,y) = x^2 + 3x\cos y + y^2$ ist eine Stammfkt ($\tilde{c}=0$)

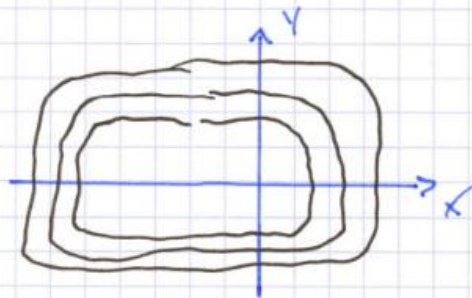
- F eindeutig bestimmt bis auf additive Konstante

Allgemeine Lösung der DGL $Pdx + Qdy = 0$

$$F(x,y) = c$$

$$\underline{x^2 + 3x\cos y + y^2 = c}$$

Kurvenschar in x - y -Ebene



3. Lineare Differentialgleichungen

3.1 Lineare DGL n-ter Ordnung für $y = y(t)$

(1) Normalform

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b \quad (*)$$

- $a_k = a_k(t)$: Koeffizientenfunktionen
- $b = b(t)$: Störfunktion / Inhomogenität
- Die lineare DGL (*) heißt homogen, falls $b(t) \equiv 0$ sonst inhomogen.

Bsp:

- $y'' - t^2 y' + 3y = e^t - 5$: inhomogene LDGL 2. Ordnung
- $y'' - 2y' + 6y = e^t$: inhomogene LDGL 2. Ordnung mit konst. Koeff.
- $y' = \sin t \cdot y + t^2$: inhomogene LDGL 1. Ordnung

(2) Anfangswertproblem

Sind die Koeffizientenfunktionen $a_k = a_k(t)$ und die Störfunktion $b = b(t)$ stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so besitzt das AWP

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y &= b \\ y(t_0) &= y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

mit $t_0 \in I$ und $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $y: I \rightarrow \mathbb{R}$

3.2 Lösungsstruktur

- Geg: $LDGL \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b \quad (*)$
- $y \in V = C^{(n)}(I, \mathbb{R}) = \{ y: I \rightarrow \mathbb{R} \mid y \text{ n-mal stetig diff'bar auf } I \}$
 V ist Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ (siehe Kapitel III)
 - $W = C^0(I, \mathbb{R}) = \{ b: I \rightarrow \mathbb{R} \mid b \text{ stetig auf } I \}$
 W ist \mathbb{R} -VR
 - Betrachten Abb $L: V \rightarrow W$ mit $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y$
mit $a_{n-1}, \dots, a_0 \in C^0(I, \mathbb{R})$

Beweis

Behauptung: L ist eine lineare Abbildung

Beweis: Seien $y_1, y_2, y \in V \quad c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= (y_1 + y_2)^{(n)} + a_{n-1}(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + a_1(y_1 + y_2)' + a_0(y_1 + y_2) \\ &= (y_1^{(n)} + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + \dots + a_1y_1' + a_0y_1) + (y_2^{(n)} + a_{n-1}y_2^{(n-1)} + \dots + a_1y_2' + a_0y_2) \\ &= L(y_1) + L(y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(c \cdot y) &= (cy)^{(n)} + a_{n-1} \cdot (cy)^{(n-1)} + \dots + a_1(cy)' + a_0 \cdot (cy) \\ &= c \cdot (y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y) \\ &= c \cdot L(y) \end{aligned}$$

Damit ist die $LDGL (*)$ eine Gleichung der Form $L(y) = b$ mit $L: V \rightarrow W$ linear also eine lineare Gleichung. Aus dem Hauptsatz über lineare Gleichungen (Kap III) folgt unmittelbar folgender Satz:

Satz (Lösungsstruktur linearer Differentialgleichungen)

Sei $\Gamma = \{ y \in C^{(n)}(I, \mathbb{R}) \mid y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b \}$

die Lösungsmenge der inhomogenen LDGL (*) und

$$U = \{ y \in C^{(n)}(I, \mathbb{R}) \mid y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \}$$

die Lösungsmenge der zugehörigen homogenen LDGL. Dann gilt:

(1) U ist ein linearer UR von $C^{(n)}(I, \mathbb{R})$

(2) $\Gamma = y_s + U$ ist affiner UR von $C^{(n)}(I, \mathbb{R})$

wobei y_s eine spezielle Lsg. der inhomogenen LDGL (*) ist.

Bemerkungen

• Kurzform von (2):

$$y_{\text{alg}} = y_s + y_h$$

↑
allgemeine Lsg der
inhomogenen LDGL

↑
eine spezielle Lsg
der inhomogenen LDGL

↑
allg. Lsg der zuge-
hörigen homogenen LDGL

• stellt spezielle Lsg auch partikuläre Lsg

• $\dim(U) = n = \text{Ordnung der LDGL} \Rightarrow$ sind y_1, \dots, y_n lin. unabh. Lösungen der homogenen LDGL

so ist $y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

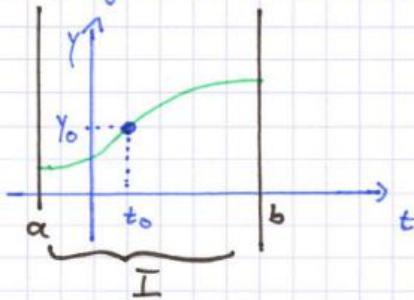
3.3 Lineare DGL 1. Ordnung

Normalform

$$y' + a(t) \cdot y = b(t) \quad (*)$$

Existenz und Eindeutigkeit

Ist $D = \{ (t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I, y \in \mathbb{R} \}$ ein Streifen mit $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und sind a, b stetige Funktionen auf I , so verläuft durch jeden Punkt $(t_0, y_0) \in D$ genau eine Lösungskurve der LDGL (*), die auf ganz I definiert ist.



Beweis folgt aus allgemeinen
Existenz und Eindeutigkeitsatz
für DGL 1. Ordnung

Lösungsalgorithmus

(a) Allgemeine Lösung der homogenen LDGL $y' + a(t) y = 0$ (+)

(+) ist eine DGL mit getrennten Variablen und die Lösung y_h hat die Form $y_h(t) = c \cdot y_1(t)$ $c \in \mathbb{R}$

$$y' + a(t)y = 0$$

$$y' = \underbrace{-a(t)}_{g(t)} \cdot \underbrace{y}_{h(y)}$$

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

$y \equiv 0$ ist konstante Lösung von (+)

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dt} = -a(t)y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -a(t) dt$$

Sei $A(t)$ Stammfkt. von $-a(t)$

$$\Rightarrow \ln|y| = A(t) + c_1 \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{A(t)+c_1} = e^{A(t)} \cdot e^{c_1}$$

$$y = \pm e^{c_1} e^{A(t)} = c_2 e^{A(t)} \quad c_2 \neq 0$$

mit Sonderlösung
 \Rightarrow

$$\underline{y_h = c e^{A(t)}} \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$\nwarrow y_1$

(b) Spezielle Lösung y_s der Inhomogenen LDGL $y' + a(t)y = b(t)$ (*)

Bestimmen eine spezielle Lösung $y_s = y_s(t)$ durch die Methode der Variation der Konstanten.

• Ansatz: $y_s = c(t) \cdot y_1(t)$

\nwarrow Lsg. der homogenen DGL

• Ableitung: $y_s' = c'(t) \cdot y_1 + c(t) \cdot y_1'$

• Einsetzen in $y_s' + a(t)y_s = b(t)$

$$c'(t)y_1 + \underbrace{c(t)y_1' + a(t)c(t)y_1}_{=0 \text{ da } y_1' + a(t)y_1 = 0} = b(t)$$

$$\Rightarrow c'(t) = \frac{b(t)}{y_1}$$

$$c(t) = \int c'(t) dt$$

• Ergebnis in Ansatz einsetzen

$$y_s = c(t) \cdot y_1$$

(c) Allgemeine Lösung y_{in} der inhomogenen LDGL $y' + a(t)y = b(t)$

$$y_{in} = y_s + y_h$$

allg. Lsg der inhomogenen LDGL eine spezielle Lsg der inhomogenen LDGL allgemeine Lösung der homogenen LDGL

Beispiel

Beispiel

$$y' + \frac{1}{t}y = t^3$$

$$D = \{ (t, y) \mid t > 0, y \in \mathbb{R} \} \text{ oder } \{ (t, y) \mid t < 0, y \in \mathbb{R} \}$$

a) allgemeine Lösung der homogenen LDGL $y' + \frac{1}{t}y = 0$

$$\frac{dy}{dt} = y' = -\frac{1}{t}y \quad \Rightarrow \text{konstante Lösung } y \equiv 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{t} dt$$

$$\ln|y| = -\ln|t| + c_1$$

$$|y| = e^{-\ln|t| + c_1} = e^{\ln \frac{1}{|t|}} \cdot e^{c_1}$$

$$|y| = \pm e^{c_1} \cdot \frac{1}{|t|}$$

$$y = c_2 \cdot \frac{1}{t} \quad c_2 \neq 0$$

mit konst. Lsg $y_h = c \cdot \frac{1}{t} \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$

b) spezielle Lösung y_s der inhomogenen LDGL $y' + \frac{1}{t}y = t^3$

• Ansatz: $y_s = c(t) \cdot \frac{1}{t}$

• Ableitung: $y'_s = c'(t) \cdot \frac{1}{t} + c(t) \cdot -\frac{1}{t^2}$

• Einsetzen in $y'_s + \frac{1}{t}y_s = t^3$

$$c'(t) \cdot \frac{1}{t} - \frac{c(t)}{t^2} + \frac{c(t)}{t^2} = t^3$$

$$c'(t) \cdot \frac{1}{t} = t^3$$

$$c'(t) = t^4$$

$$c(t) = \frac{1}{5}t^5 + \tilde{c}$$

• Einsetzen in Ansatz:

$$y_s = \frac{1}{5}t^5 \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{5}t^4$$

c) allgemeine Lösung y_{in} der inhomogenen Gleichung $y' + \frac{1}{t}y = t^3$

$$y_{in} = y_s + y_h$$

$$\underline{y_{in} = \frac{1}{5}t^4 + c \cdot \frac{1}{t}} \quad t \in I, \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$$\underline{I = (-\infty, 0) \text{ oder } (0, \infty)}$$

3.4 Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Gegeben

Gegeben $y_1, \dots, y_n \in C^{(n)}(I, \mathbb{R})$ n Funktionen

Die Fkt. sind linear unabhängig, wenn keine der Fkt. Linearkombination der anderen ist

Kriterium I

Die Fkt. y_1, \dots, y_n sind genau dann linear unabhängig wenn die Gleichung

$$\boxed{c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}} \quad (\diamond)$$

nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ hat. Die Gleichung (0) ist eine Gleichung für Funktionen und äquivalent zu

$$\forall t: c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0$$

Durch Differentiation erhält man für die k -te Ableitung:

$$c_1 y_1^{(k)} + \dots + c_n y_n^{(k)}$$

Kriterium II

Aus (0) folgt für jedes t :

$$c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0$$

$$c_1 y_1'(t) + \dots + c_n y_n'(t) = 0$$

$$\vdots$$

$$c_1 y_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}}_{=: W(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wronski-Matrix

- Die Fkt. sind linear unabhängig genau dann wenn $\det(W(t)) \neq 0$ für ein $t \in I$.
- Sind y_1, \dots, y_n Lösungen einer homogenen LDGL, gilt sogar y_1, \dots, y_n lin. unabh. $\Leftrightarrow \exists t \in I: \det(W(t)) \neq 0 \Leftrightarrow \forall t \in I: \det(W(t)) \neq 0$

3.5 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Geg: LDGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b \quad (*)$$

mit $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ konstante Koeffizienten

(A) Allgemeine Lösung der homogenen LDGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (+)$$

(3.2) \Rightarrow Lösungsmenge ist lin. UR von $C^n(I, \mathbb{R})$ der Dimension n

\Rightarrow Sind y_1, \dots, y_n lin. unabh. Lsg. von (+) dann sind sie Basis des Lösungsraumes, d.h. für die allg. Lsg y_h von (+) gilt:

$$y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

Bestimmung einer Basis des Lösungsraumes von (+)

- Ansatz: $y = e^{\lambda t}$ (suchen Lösungen von (+) dieser Form), $\lambda \in \mathbb{R}$
- Ableitungen: $y' = \lambda e^{\lambda t}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$, ..., $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t}$
- Einsetzen in (+):

$$\begin{aligned} & \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0 \\ & :e^{\lambda t} \left(\right. \\ & \quad \left. \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \right) \end{aligned}$$

$=: P(\lambda)$ charakteristisches Polynom

- Auswertung:
 - Für jede NS λ von $P(\lambda)$ erhalten wir eine Lösung $y = e^{\lambda t}$ von (+)
 - $P(\lambda)$ hat n Nullstellen in \mathbb{C} gezählt mit ihren algebraischen Vielfachheiten

Erhalten n Basislösungen von (+) wie folgt:

- Ist $\lambda = \alpha$ reelle NS von $P(\lambda)$ der Vielfachheit $r > 0$ so erhalten wir r linear unabhängige Lösungen

$$y_1 = e^{\alpha t}, y_2 = t e^{\alpha t}, \dots, y_r = t^{r-1} e^{\alpha t}$$

- Ist $\lambda = \alpha + ib$ ($\alpha, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) komplexe NS von $P(\lambda)$ mit Vfh $r > 1$ so ist $\alpha - ib$ ebenfalls komplexe

r -fache NS. Wir erhalten komplexe Lösungen

$$t^\alpha e^{\lambda t} = t^\alpha e^{(\alpha+ib)t} = t^\alpha e^{\alpha t} e^{ibt} = t^\alpha e^{\alpha t} (\cos bt + i \sin bt)$$

$$t^\alpha e^{\bar{\lambda} t} = t^\alpha e^{(\alpha-ib)t} = t^\alpha e^{\alpha t} e^{-ibt} = t^\alpha e^{\alpha t} (\cos bt - i \sin bt)$$

$$\alpha \in \{0, \dots, r-1\}$$

Dann sind auch die (komplexen) Linearkombinationen

$$\frac{1}{2} (t^\alpha e^{\lambda t} + t^\alpha e^{\bar{\lambda} t}) = t^\alpha e^{\alpha t} \cos bt$$

$$\frac{1}{2i} (t^\alpha e^{\lambda t} - t^\alpha e^{\bar{\lambda} t}) = t^\alpha e^{\alpha t} \sin bt$$

Lösungen von (*), da die Lösungsmenge ein lin. UR ist

$\Rightarrow 2r$ linear unabhängige Lösungen von (*)

$$y_{11} = e^{\alpha t} \cos bt, y_{12} = t e^{\alpha t} \cos bt, \dots, y_{1r} = t^{r-1} e^{\alpha t} \cos bt$$

$$y_{21} = e^{\alpha t} \sin bt, y_{22} = t e^{\alpha t} \sin bt, \dots, y_{2r} = t^{r-1} e^{\alpha t} \sin bt$$

Beispiel

$$a) \quad y'' - 2y' - 3y = 0 \quad y = y(t)$$

• Ansatz $y = e^{\lambda t}$

• Ableitungen $y' = \lambda e^{\lambda t}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$

• Einsetzen in $y'' - 2y' - 3y = 0$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - 2\lambda e^{\lambda t} - 3e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \text{NS } \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{-t}, y_2 = e^{3t} \quad \Rightarrow \text{allg. Lsg: } y_h = \underline{c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad y'' + 4y = 0$$

• Ansatz $y = e^{\lambda t}$ ($y' = \lambda e^{\lambda t}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$)

• Einsetzen $\lambda^2 e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} = 0$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\text{NS } \lambda = \pm 2i$$

komplexe Lsg $\left. \begin{array}{l} e^{2it} = \cos 2t + i \sin 2t \\ e^{-2it} = \cos 2t - i \sin 2t \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = \cos 2t \\ y_2 = \sin 2t \end{array}$

allg. Lsg $y_h = \underline{c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

c) $y'' - 2y' + y = 0$

• Ansatz $y = e^{\lambda t}$

• Einsetzen $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

• Nullstellen $\lambda_{1/2} = 1$ doppelte NS

• Basis $y_1 = e^t, y_2 = t \cdot e^t$

• allg. Lsg $y_h = \underline{\underline{c_1 e^t + c_2 t e^t}}$

d) $y'' + 4y' + 13 = 0$

• Ansatz $y = e^{\lambda t}$

• Einsetzen $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$

• Nullstellen $\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4-13}$

$\lambda_{1/2} = -2 \pm 3i$

• Basis $y_1 = e^{-2t} \cdot \cos 3t, y_2 = e^{-2t} \cdot \sin 3t$

• allg. Lsg $y_h = c_1 e^{-2t} \cos 3t + c_2 e^{-2t} \sin 3t \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y_h = e^{-2t} (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(B) Bestimmung einer speziellen Lösung der Inhomogenen LDGL

1. Methode: Variation der Konstante

Vorteil: funktioniert auch bei LDBL mit nicht konstanten Koeffizienten $a_k \approx a_k(t)$

Nachteil: Rechenaufwand

Ausgangspunkt: allgemeine Lsg der homogenen LDBL

$$y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

Ansatz für y_s : $y_s = c_1(t) y_1 + \dots + c_n(t) \cdot y_n$

Bestimmen Ableitungen mit Produktregel

$$\begin{aligned} y_s &= c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \\ y_s' &= c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n + \underbrace{c_1 y_1' + \dots + c_n y_n'}_{\substack{= 0 \text{ willkürlich} \\ \text{festgelegt}}} \\ y_s'' &= c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n'' + \underbrace{c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n'}_{\substack{= 0 \\ \vdots}} \\ &\vdots \\ y_s^{(n-1)} &= c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} + \underbrace{c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)}}_{= 0} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \cdot a_0 \\ \cdot a_1 \\ \cdot a_2 \\ \vdots \\ \cdot a^{(n-1)} \end{array} \right\}$$

$$y_s^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} + c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} \quad +$$

$$\text{b} = 0 + \dots + 0 + \underbrace{c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}}_{\text{b}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{b} \end{pmatrix}$$

\Rightarrow LGS für c_1', \dots, c_n'

Bestimmen Lösung z.B. mit Cramerscher Regel

$$c_k = \int c_k' dt \Rightarrow y_s$$

Beispiel

Beispiel

$$y'' - 2y' - 3y = -6e^{2t}$$

- allg. Lsg der homogenen LÖGL $y'' - 2y' - 3y = 0$

$$y_h = \underline{\underline{c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (\text{siehe 1})$$

- Ansatz für y_s

$$y_s = c_1(t) y_1 + c_2(t) y_2$$

$$y_1 = e^{-t}, y_2 = e^{3t}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & 3e^{3t} \end{pmatrix}}_{W(t)} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \det(W(t)) = 3e^{2t} + e^{2t} = 4e^{2t}$$

$$\bullet c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3t} \\ -6e^{2t} & 3e^{3t} \end{vmatrix}}{\det W} = \frac{6e^{5t}}{4e^{2t}} = \frac{3}{2}e^{3t} \Rightarrow c_1(t) = \frac{1}{2}e^{3t}$$

$$\bullet c_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} & -6e^{2t} \end{vmatrix}}{\det W} = \frac{-6e^t}{4e^{2t}} = -\frac{3}{2}e^{-t} \Rightarrow c_2(t) = \frac{3}{2}e^{-t}$$

$$\Rightarrow y_s = c_1(t) e^{-t} + c_2(t) e^{3t} = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{2t} = 2e^{2t}$$

\Rightarrow Allgemeine Lösung der inhomogenen LÖGL

$$\underline{\underline{y_{in} = y_s + y_h = 2e^{2t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. Methode: spezielle Ansätze nach Typ der Inhomogenität

Vorteil: • leichter als Variation der Konstanten

Nachteil • geht nur bei LÖSL mit konstanten Koeffizienten und speziellen Störfunktionen $b(t)$
• evtl. Resonanzfall

Bsp: $y'' - 2y' - 3y = 6t + 1$

- allg. Lsg der homogenen Gleichung: $y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- spezieller Ansatz für y_s :

Ansatz: $y_s = At + B$ $A, B \in \mathbb{R}$

Ableitung: $y_s' = A$ $y_s'' = 0$

Einsetzen in $y_s'' - 2y_s' - 3y_s = 6t + 1$

$$0 - 2A - 3(At + B) = 6t + 1$$

$$-3At + (-2A - 3B) = 6t + 1$$

Koeffizientenvergl.

$$\left. \begin{array}{l} t^1: -3A = 6 \\ t^0: -2A - 3B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -2, B = 1$$

$\Rightarrow \underline{y_s = -2t + 1}$

- allg. Lsg der inhomogenen LÖSL

$$\underline{y_{inh} = y_s + y_h = -2t + 1 + c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ansätze

{Störfunktion}

Störfunktion $b(t)$	Ansatz für y_s (ohne Resonanz)
$b(t) = Q(t)$ Polynom vom Grad m	$y_s = A_m t^m + \dots + A_1 t + A_0$ (allgemeines Polynom m -ten Grades)
$b(t) = Q(t) \cdot e^{at}$	$y_s = (A_m t^m + \dots + A_1 t + A_0) e^{at}$
$b(t) = Q(t) \cos bt$ oder $Q(t) \sin bt$	$y_s = (A_m t^m + \dots + A_0) \cos bt + (B_m t^m + \dots + B_0) \sin bt$
$b(t) = Q(t) e^{at} \cos bt$ oder $b(t) = Q(t) e^{at} \sin bt$	$y_s = (A_m t^m + \dots + A_0) e^{at} \cos bt + (B_m t^m + \dots + B_0) e^{at} \sin bt$

Bemerkung

Ist $b(t) = b_1(t) + b_2(t) + \dots$ so kann man für jeden Summanden $b_i(t)$ einen eigenen Ansatz machen
 $\Rightarrow y_{s1}, \dots, y_{s2} \dots$ $y_s = y_{s1} + y_{s2} + \dots$ (Superpositionsprinzip)

Bsp: $b(t) = 4t^2 + t e^{2t} + 5 + 2 \cos 4t$

$$y_s = \underbrace{At^2 + Bt + C}_{y_{s1}} + \underbrace{(Dt + E) e^{2t}}_{y_{s2}} + \underbrace{F \cos 4t + G \sin 4t}_{y_{s3}}$$

Resonanzfall

Teile (Summanden) der Störfunktion $b(t)$ sind Lösungen der homogenen LÖGL (lassen sich damit einer NS des char. Pol. zuordnen)

Beispiele

Bsp1

$$y'' - 2y' - 3y = 5e^{3t}$$

- allg. Lsg. der homogenen DGL

$$y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- spezielle Lösung y_s der inhomogenen LDGL

1. Ansatz ohne Resonanz : $b(t) = 5e^{3t} \Rightarrow y_s = A e^{3t}$

- Ableitungen : $y_s' = 3A e^{3t}, y_s'' = 9A e^{3t}$

- Einsetzen in $y_s'' - 2y_s' - 3y_s = 5e^{3t}$

$$9A e^{3t} - 6A e^{3t} - 3A e^{3t} = 5e^{3t}$$

$$0 = 5e^{3t}$$

Widerspruch

↑

kein Wunder

y_s ist Lsg. der homogenen GL

2. Neuer Ansatz

$$y_s = t \cdot A e^{3t}$$

- Ableitungen

$$y_s' = A e^{3t} + 3A t e^{3t}$$

$$y_s'' = 3A e^{3t} + 3A e^{3t} + 9A t e^{3t} = 6A e^{3t} + 9A t e^{3t}$$

- Einsetzen in $y_s'' - 2y_s' - 3y_s = 5e^{3t}$

$$6A e^{3t} + 9A t e^{3t} - 2A e^{3t} - 6A t e^{3t} - 3A t e^{3t} = 5e^{3t}$$

$$4A e^{3t} = 5e^{3t}$$

$$\Rightarrow A = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{5}{4} t e^{3t}$$

- allg. Lsg. der inhomogenen LDGL

$$\underline{y_{in} = y_s + y_h = \frac{5}{4} t e^{3t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}}$$

Bsp2 $y''' - y'' = t+1$

• allg. Lsg der homogenen LDGL $y''' - y'' = 0$

- Ansatz: $y = e^{2t} \Rightarrow y' = 2e^{2t}, y'' = 2^2 e^{2t}, y''' = 2^3 e^{2t}$

- Einsetzen in $y''' - y'' = 0$

$$2^3 e^{2t} - 2^2 e^{2t} = 0$$

$$2^3 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow 2^2(2-1) = 0 \quad \text{NS } \lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 1$$

- Basis: $y_1 = e^{0t} = 1, y_2 = t \cdot e^{0t} = t, y_3 = e^t$

$\Rightarrow \underline{y_h = c_1 + c_2 t + c_3 e^t} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

• spezielle Lsg der inhomogenen LDGL

- Ansatz ohne Beachtung des Resonanzfalls $y_s = At + B$

$\Rightarrow y_s' = A, y_s'' = 0 = y_s'''$ Einsetzen $0 - 0 = t+1$ \hookrightarrow

- neuer Ansatz: $y_s = t \cdot (At + B) = At^2 + Bt$

$\Rightarrow y_s' = 2At + B, y_s'' = 2A, y_s''' = 0$

Einsetzen in $y_s''' - y_s'' = t+1$ ergibt $0 - 2A = t+1$ \hookrightarrow

Koeffizientenvergleich ergibt nichts

- richtiger Ansatz: $y_s = t^2 (At + B) = At^3 + Bt^2$

$\Rightarrow y_s' = 3At^2 + 2Bt, y_s'' = 6At + 2B, y_s''' = 6A$

Einsetzen ergibt $6A - 6At - 2B = t+1$

Koeffizientenvergleich: $\begin{cases} t^1: -6A = 1 \\ t^0: -6A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{6}, B = -1$

$\Rightarrow y_s = -\frac{1}{6} t^3 - t^2$

• allg. Lsg der inhomogenen LDGL

$\underline{y_{inh} = y_s + y_h = -\frac{1}{6} t^3 - t^2 + c_1 + c_2 t + c_3 e^t} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Resonanzfall erkennen

Inhomogenität	Resonanz, falls λ NS von $P(\lambda)$
$e^{at} (Q_1(t) \cos bt + Q_2(t) \sin bt)$	$\lambda = a + ib$
$Q(t) \cdot e^{at}$	$\lambda = a$
$Q(t) \cos bt$ oder $Q(t) \sin bt$	$\lambda = ib$
$Q(t)$	$\lambda = 0$

Merke: Ansatz mit Resonanz = Ansatz ohne Resonanz $\cdot t^\alpha$
 α = Vielfachheit der NS λ
 die für den Resonanzfall sorgt

Beispiel

Beispiel

Warum dürfen Soldaten nicht im Gleichschritt über eine Brücke marschieren?

Brücke als linearer Feder-Masse-Schwinger



$y = y(t)$ Vertikale Auslenkung der Brücke = Ortskoordinate des Brückenmittelpunktes

$y'(t) \hat{=}$ Geschwindigkeit v des Punktes $y''(t) \hat{=}$ Beschleunigung

$F = -k \cdot y$ k = Federkonstante der Brücke (Hookesches Gesetz)

$$F = m \cdot a = m \cdot y''$$

$$\Rightarrow m \cdot y'' = -k \cdot y \quad \text{bzw.} \quad y'' + \frac{k}{m} \cdot y = 0$$

homogene LDGL

$$\frac{k}{m} > 0 \quad \text{Setzen} \quad \frac{k}{m} = \alpha^2$$

$$\Rightarrow y'' + \alpha^2 y = 0$$

$$\text{char. Pol.} \quad \lambda^2 + \alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda^2 = -\alpha^2 \quad \Rightarrow \lambda = \pm \alpha i$$

$$\Rightarrow \underline{y_h = c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y \equiv 0$$

$$\text{Jetzt:} \quad F(t) = -k \cdot y(t) + f(t)$$

\uparrow
äußere Kraft

$$m \cdot y'' = -k y + f(t)$$

$$y'' + \frac{k}{m} y = \frac{f(t)}{m}$$

$$y'' + \alpha^2 y = \beta \cdot \sin \omega t$$

\uparrow
periodische Kraft

$$y_h = c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t$$

kein Problem, falls $\alpha \neq \omega$ denn $y_s = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

$$\Rightarrow y_{\text{in}} = A \cos \omega t + B \sin \omega t + c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t$$

aber Resonanzfall, falls $\omega = \alpha$ (Resonanzfrequenz)

$$y_s = At \cos \alpha t + Bt \sin \alpha t$$

$$\begin{aligned} y_s' &= A \cos \alpha t - At \alpha \sin \alpha t + B \sin \alpha t + Bt \alpha \cos \alpha t \\ &= (A + Bt\alpha) \cos \alpha t + (B - At\alpha) \sin \alpha t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_s'' &= B\alpha \cos \alpha t - (A + Bt\alpha)\alpha \sin \alpha t + -A\alpha \sin \alpha t + (B - At\alpha)\alpha \cos \alpha t \\ &= (2B\alpha - At\alpha^2) \cos \alpha t + (-2A\alpha - Bt\alpha^2) \sin \alpha t \end{aligned}$$

$$y_s'' + \alpha^2 y_s = 2B\alpha \cos \alpha t - 2A\alpha \sin \alpha t \stackrel{!}{=} \beta \cdot \sin \alpha t$$

$$\Rightarrow B = 0, A = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow y_s = -\frac{\beta}{2\alpha} t \cos \alpha t$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_{in} = -\frac{\beta}{2\alpha} \cdot t \cdot \cos \alpha t + c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow t \rightarrow \infty$

\Rightarrow Brücke kann einbrechen

3.6 Eulersche Differentialgleichungen

Eine lineare DGL n-ter Ordnung vom Typ

$$t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 t y' + a_0 y = b$$

mit $y = y(t)$, $b = b(t)$, $a_k \in \mathbb{R}$ $k = 0, \dots, n-1$

heißt Eulersche DGL

Bemerkung:

Eine Eulersche DGL ist eine spezielle LDGL mit nichtkonstanten Koeff.

(A) Allgemeine Lösung der homogenen Euler DGL

Bestimmen eine Basis des Lösungsraumes von

$$t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 t y' + a_0 y = 0 \quad (*)$$

mit dem Ansatz

$$y(t) = t^2 \quad t \neq 0$$

Sind y_1, \dots, y_n lin. unabh. Lsg dieser Form, dann gilt

$$\underline{y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n}$$

Bestimmung einer Basis $\{y_1, y_2\}$ im Fall $n = 2$

$$y(t) = t^2 \quad y' = 2t^{2-1} \quad y'' = 2(2-1)t^{2-2}$$

Einsetzen in DGL (+) $t^2 y'' + t a_1 y' + a_0 y = 0$

$$\Rightarrow t^2 \cdot 2(2-1)t^{2-2} + t a_1 2t^{2-1} + a_0 t^2 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 \cdot (2(2-1) + a_1 2 + a_0) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{2(2-1) + a_1 2 + a_0}_{\text{char. Polynom}} = 0$$

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ NS des char. Polynoms, so ist $y = t^\lambda$ reelle bzw. komplexe Lsg. der homogenen Euler DGL (+)

Seien λ_1, λ_2 NS des char. Polynoms

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + a_1 \lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

$$\lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

$$\Rightarrow a_1 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$$

$$a_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

Wurzelsatz von Vieta

1. Fall $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reell $\Rightarrow y_1 = t^{\lambda_1}, y_2 = t^{\lambda_2}$ bilden Basis

2. Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ reell $\Rightarrow y_1 = t^{\lambda_1}, y_2 = t^{\lambda_1} \cdot \ln t$

3. Fall $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$

$$\Rightarrow \tilde{y}_1 = t^{\alpha+i\beta} \quad \tilde{y}_2 = t^{\alpha-i\beta} \quad \text{komplexe Lsg}$$

$$\tilde{y}_1 = t^\alpha \cdot t^{i\beta} = t^\alpha \cdot e^{i\beta \ln t} = t^\alpha (\cos(\beta \ln t) + i \sin(\beta \ln t))$$

$$\tilde{y}_2 = t^\alpha \cdot t^{-i\beta} = t^\alpha \cdot e^{-i\beta \ln t} = t^\alpha (\cos(\beta \ln t) - i \sin(\beta \ln t))$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = t^\alpha \cos(\beta \ln t)$$

$$y_2 = \frac{1}{2i} (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = t^\alpha \sin(\beta \ln t)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reell} : y_h = c_1 t^{\lambda_1} + c_2 t^{\lambda_2}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \text{ reell} : y_h = c_1 t^{\lambda_1} + c_2 t^{\lambda_1} \cdot \ln t$$

$$\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta : y_h = c_1 t^\alpha \cos(\beta \ln t) + c_2 t^\alpha \sin(\beta \ln t)$$

$$(1) \quad t^2 y'' + 3ty' - 3y = 0$$

$$y = t^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \quad \lambda_1 = +1 \quad \lambda_2 = -3$$

$$\Rightarrow \underline{y_h = c_1 t + c_2 t^{-3} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

$$(2) \quad t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0$$

$$y = t^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$$

$$\Rightarrow \underline{y_h = c_1 \cdot t^2 + c_2 \cdot t^2 \cdot \ln t}$$

$$(3) \quad t^2 y'' - 6ty' + 2y = 0$$

$$y = t^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

$$\Rightarrow \underline{y_h = c_1 t \cos \ln|t| + c_2 t \sin \ln|t|}$$

Hintergrund zum Ansatz

Substitution

$$y(t) = z(\ln t)$$

$$(x = \ln t)$$

$$\Rightarrow y'(t) = z'(\ln t) \cdot \frac{1}{t}$$

$$y''(t) = z''(\ln t) \cdot \frac{1}{t^2} + z'(\ln t) \cdot -\frac{1}{t^2}$$

Insgesamt kürzen sich die t 's raus

\Rightarrow homogene L DGL für $z = z(x)$ mit $x = \ln t$
mit konstanten Koeffizienten

Lösungen

$$e^{2x} \rightarrow e^{2 \ln t} \rightarrow t^2$$

$$\cos bx \rightarrow \cos b \ln t$$

$$x^2 e^{2x} \rightarrow (\ln t)^2 e^{2 \ln t} = (\ln t)^2 \cdot t^2$$

(B) Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Euler DGL

Man verwendet Variation der Konstanten

$$\text{Ansatz} \quad y_s = c_1(t) y_1 + c_2(t) y_2$$

Beispiel

$$t^2 y'' + 3t y' - 3y = t \quad (*)$$

$$y_h = c_1 t + c_2 t^{-3}$$

Vollk-Ansatz $y_s = c_1(t) \cdot t + c_2(t) \cdot t^{-3}$

führt (siehe (3.5)) auf
$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

aber Vorsicht! L O G L (*) hat nicht Normalform

Normalform von (*) ist: $y'' + \frac{3}{t} y' - \frac{3}{t^2} y = \frac{1}{t} \Rightarrow b(t) = \frac{1}{t}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t & t^{-3} \\ 1 & -3t^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t^{-3} \\ t^{-1} & -3t^{-4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^{-3} \\ 1 & -3t^{-4} \end{vmatrix}} = \frac{-t^{-4}}{-4t^{-3}} = \frac{1}{4} t^{-1} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4} \ln t$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & t^{-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^{-3} \\ 1 & -3t^{-4} \end{vmatrix}} = \frac{1}{-4t^{-3}} = -\frac{1}{4} t^3 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{16} t^4$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{1}{4} \ln t \cdot t - \frac{1}{16} t$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_{in} = y_s + y_h = \frac{1}{4} \ln t \cdot t - \frac{1}{16} t + c_1 t + c_2 t^{-3}}}$$

4. Differentialgleichungssystem

4.1 Räuber - Beute Modell (Volterra 1928)

Betrachten biologisches System aus Räubern und Beute mit

- $x = x(t)$ Anzahl der Räuber zum Zeitpunkt t

- $y = y(t)$ Anzahl der Beute zum Zeitpunkt t

Die Räuber wachsen negativ korreliert mit dem eigenen Bestand (Sterberate α) und positiv korreliert mit dem eigenen Bestand und dem Bestand der Beute, etwa

$$\dot{x} = -\alpha x + \beta \cdot xy = -(\alpha - \beta y) x \quad (\alpha, \beta > 0)$$

Die Beute wächst positiv korreliert mit dem eigenen Bestand (Geburtenrate γ) und negativ korreliert mit dem eigenen Bestand und dem Bestand der Räuber, etwa

$$\dot{y} = \gamma \cdot y - \delta xy = (\gamma - \delta x) y \quad (\gamma, \delta > 0)$$

Somit erhalten wir für die Funktionen $x = x(t)$ und $y = y(t)$ ein System aus 2 Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dot{x} = -(\alpha - \beta y) x \\ \dot{y} = (\gamma - \delta x) y \end{cases}$$

In Vektorform erhalten wir eine Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\alpha - \beta y)x \\ (\gamma - \delta x)y \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{r}} = \vec{V}(\vec{r}) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4.2 Abbildungen $\vec{r}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

(1) Definition

Betrachten Abbildung

$$\vec{r}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

und $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall. Die Abbildungen $x_1, \dots, x_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißen dann Komponentenabbildungen von \vec{r} . Weiterhin ist

$$\text{Spur}(\vec{r}) := \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}$$

die Spur der Abbildung \vec{r} .

(2) Stetigkeit / Differenzierbarkeit

Die Abbildung \vec{r} ist stetig/diff'bar für $t \in I$, falls sämtliche Komponentenabbildungen x_i stetig/diff'bar für $t \in I$ sind. Für die Ableitung $\dot{\vec{r}}$ gilt dann:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

Bemerkung 1

Ist \vec{r} stetig für alle $t \in I$, so heißt die Abbildung \vec{r} Kurve (in Parameterform)

Bemerkung 2

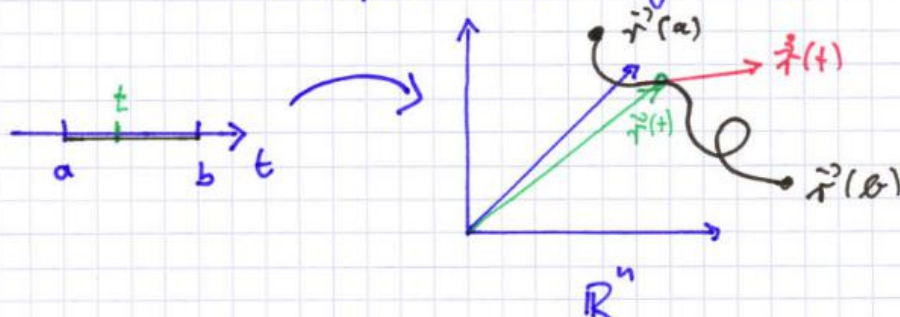
$$C^1(I, \mathbb{R}^n) := \left\{ \vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \vec{r} \text{ diff'bar für alle } t \in I \\ \vec{r} \text{ stetig für alle } t \in I \end{array} \right\}$$

ist ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ (siehe Kapitel III)

Physikalische Interpretation

$\vec{r} = \vec{r}(t)$: Bewegung Zeit $t \mapsto$ Ort $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$

$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$: Geschwindigkeitsvektor: $\dot{\vec{r}}(t)$ zeigt in Richtung der Bewegung (Tangentenvektor im Punkt $\vec{r}(t)$) und $\|\dot{\vec{r}}(t)\|$ = Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t



Satz

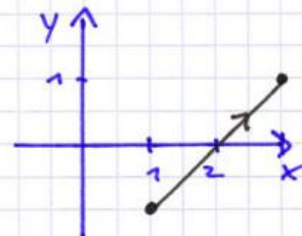
Ist $\vec{r} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine Kurve mit $I = [a, b]$, so gilt für die Länge L der Kurve

$$L = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt$$

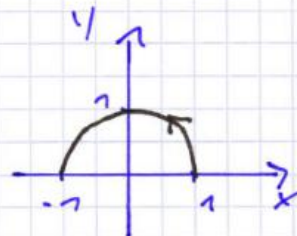
Beispiel

Beispiele

- (1) • $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -1+t \end{pmatrix} \quad t \in I = [0, 2]$
• $\vec{r} \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$, \vec{r} stetig $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stetig $\forall t \in I$
• $\text{Spur}(\vec{r}) = \{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = x - 2, 1 \leq x \leq 3 \}$ Strecke
• $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{2}$
 $\Rightarrow L = \int_0^2 \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t \Big|_0^2 = 2\sqrt{2}$



- (2) • $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in I = [0, \pi]$
• $\vec{r} \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$
• $\text{Spur}(\vec{r}) = \{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0 \}$ Halbkreis
• $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1} = 1$
 $\Rightarrow L = \int_0^\pi 1 dt = \pi$



4.3 Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

(1) Normalform

DGL-System 1. Ordnung für gesuchte Funktionen

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$$

Skalare Form

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = v_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

mit $v_1, \dots, v_n : G \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$

Vektorform

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v}(t, \vec{x}) \quad (*)$$

für $\vec{x} = \vec{x}(t)$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $\vec{v} : G \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$

(2) Lösung / AWP

Eine Kurve $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lösungskurve von (*)

falls für alle $t \in I$ gilt $(t, \vec{x}(t)) \in G$ und

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}(t, \vec{x}(t))$$

Gilt außerdem noch $\vec{x}(t_0) = \vec{a}$ mit $t_0 \in I$ und $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

so heißt $\vec{x} = \vec{x}(t)$ Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v}(t, \vec{x}), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{a}$$

Unter der allgemeinen Lösung von (*) versteht man

eine Kurvenschar $\vec{x} = \vec{x}(t, c_1, \dots, c_n)$ mit Parametern

$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, die aus lauter Lösungskurven (allen) von (*) besteht.

(3) Beispiel

(3) Beispiel $n=2$ $x_1 = x$ $x_2 = y$

DGL System

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{t}x + 2ty \\ \dot{y} = \frac{1}{t}y \end{cases}$$

$$t \neq 0 \quad \underline{I} = (-\infty, 0) \text{ oder } (0, \infty)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{x}} = v(t, x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t}x + 2ty \\ \frac{1}{t}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 2t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lösung

Lösung

$$\dot{y} = \frac{1}{t} \cdot y \quad \text{DGL mit getrennten Variablen bzw. lineare homogene DGL}$$

$$\text{Lösung: } y = d \cdot t \quad d \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{1}{t} \cdot x + 2 \cdot d \cdot t^2$$

$$\dot{x} - \frac{1}{t}x = 2d \cdot t^2 \quad \text{lineare inhomogene DGL}$$

$$x_h = c \cdot t \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ansatz für } x_s: x_s = c(t) \cdot t \Rightarrow \dot{x}_s = c'(t) \cdot t + c(t)$$

$$\text{einsetzen in } \dot{x} - \frac{1}{t}x = 2d \cdot t^2$$

$$c'(t) \cdot t + c(t) - c(t) = 2d \cdot t^2$$

$$c' = 2 \cdot d \cdot t \Rightarrow c = d \cdot t^2$$

$$\Rightarrow x_s = d \cdot t^3$$

$$\Rightarrow x = x_s + x_h = d \cdot t^3 + c \cdot t$$

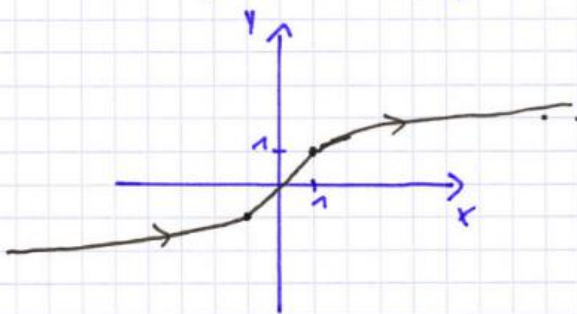
$$\Rightarrow \text{Allgemeine Lösung } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \cdot t^3 + c \cdot t \\ d \cdot t \end{pmatrix} \quad c, d \in \mathbb{R}$$

Betrachten 2 Lösungen

Lösung 1 ($d=1, c=0$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} \text{Spur}(\vec{r}) &= \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \mid t \in I \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in I \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x=y^3, x \neq 0 \right\} \end{aligned}$$



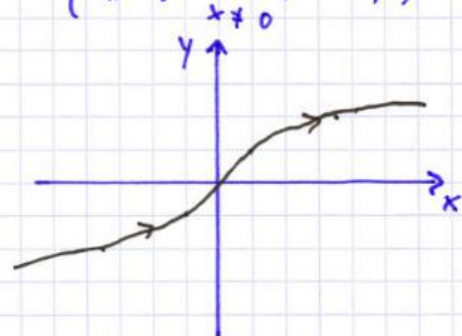
$$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 2 ($d=2, c=3/2$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^3 + \frac{3}{2}t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\begin{aligned} \text{Spur}(\vec{r}) &= \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \mid t \in I \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 2t^3 + \frac{3}{2}t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \mid t \in I \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = \frac{1}{4}y^3 + \frac{3}{4}y, x \neq 0 \right\} \end{aligned}$$



$$\vec{r}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Spuren beider Kurven gehen durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aber mit unterschiedlichem Anstieg

(4) DGL n-ter Ordnung \rightarrow DGL - System 1. Ordnung

gew. DGL n-ter Ordnung

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

$$x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \ddot{x}, \dots, x_n = x^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = x_4, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n$$

DGL-System 1. Ordnung

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Beispiel $\ddot{x} = -2x + t^2, x = x(t)$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = -2x_1 + t^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + t^2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

4.4 Lineare DGL - Systeme 1. Ordnung

Ein DGL-System der Form

$$\vec{r}'(t) = A(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{b}(t) \quad (*)$$

heißt lineares DGL-System 1. Ordnung, wobei

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \quad \text{gesuchte Größe ist}$$

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \quad \text{Koeffizientenmatrix}$$

$$\vec{b} = \vec{b}(t) \quad \text{Störfunktion, falls } \vec{b} \equiv \vec{0} \text{ heißt das System homogen}$$

Satz

Seien

$$\Gamma = \left\{ \vec{r} \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \vec{r}'(t) = A(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{b}(t), \forall t \in I \right\}$$

die Lösungsmenge des inhomogenen LDGL-Systems (*) und

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{r} \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \vec{r}'(t) = A(t) \cdot \vec{r}(t) \right\}$$

die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems.

Dann gilt:

(1) \mathcal{U} ist lin. UR von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ der Dimension n

(2) $\{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n\} \subseteq \mathcal{U}$ ist Basis des Lösungsraumes \mathcal{U} des homogen LDGL-Systems

$$\Leftrightarrow \det(W(t)) := \det(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_n(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow \det(W(t)) \neq 0 \quad \text{für ein } t \in I$$

(3) $\Gamma = \emptyset$ oder $\Gamma = \vec{r}_s + \mathcal{U}$ wobei $\vec{r}_s \in \Gamma$ beliebig

$$\text{d.h. } \vec{r}_{in} = \vec{r}_s + \vec{r}_h$$

Beweisidee

- $L: C^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit $L(\vec{r}) = \ddot{\vec{r}} - A(t) \cdot \vec{r}$ ist lin. Abb
- $\Rightarrow L(\vec{r}) = \ddot{\vec{r}} - A(t)\vec{r} = \vec{b}(t)$ ist lin. Gleichung
- \Rightarrow (1) und (3) folgt aus Hauptsatz über lin. Gleichungen
- (2) analog zu (3.4)

Bestimmung der Lösungsmenge des homogenen Systems für konstante Koeffizientenmatrizen

$$\ddot{\vec{r}} = A\vec{r}$$

Ansatz: $\vec{r}(t) = e^{2t} \cdot \vec{v}$ $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ konstanter Vektor

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = 2e^{2t} \cdot \vec{v}$$

Einsetzen in $\ddot{\vec{r}} = A\vec{r}$

$$2e^{2t} \cdot \vec{v} = A \vec{v} e^{2t} \quad || : e^{2t}$$

$$2\vec{v} = A\vec{v}$$

$\Rightarrow \vec{v}$ ist EV zum EW 2 von A

Beispiel: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

EV: $A - 2E = \begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 1 & 2-2 \end{pmatrix} \quad \det(A - 2E) = (2-2)^2 - 1 = -1 \neq 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3$

EW zu $\lambda_1 = 1$: $(A - E)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \vec{v} = c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{r}_1(t) = e^{1t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}}$$

EW zu $\lambda_2 = 3$ A symm $\Rightarrow \vec{v} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\vec{r}_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}}$

2 mögliche Probleme können auftreten:

- ① komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms
- ② $gv(A, \lambda) < av(A, \lambda) \Rightarrow$ zu wenige linear unabhängige Lösungen

zu ①

Bsp: • $\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, |A - \lambda E| = (1 - \lambda)^2 + 1 \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$

• EV zu $\lambda_1 = 1 + i$

$(A - (1+i)E) \vec{v} = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = c \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \vec{r}_{\text{komplex}}(t) = e^{(1+i)t} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \cdot e^{it} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$= e^t (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -e^t \sin t + i e^t \cos t \\ e^t \cos t + i e^t \sin t \end{pmatrix}$

$= \underbrace{\begin{pmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix}}_{=: \vec{r}_1(t)} + i \underbrace{\begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}}_{=: \vec{r}_2(t)}$

(Herleitung analog zu (3.5))

Probe zu \vec{r}_1 :

$\dot{\vec{r}}_1 = \begin{pmatrix} -e^t \sin t & -e^t \cos t \\ e^t \cos t & -e^t \sin t \end{pmatrix}$

$A \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \sin t - e^t \cos t \\ -e^t \sin t + e^t \cos t \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \dot{\vec{r}}_1$

$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{y}_h = c_1 \begin{pmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$= \underline{\underline{e^t \begin{pmatrix} -c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ c_1 \cos t + c_2 \sin t \end{pmatrix}}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

zu ② Bsp • $\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{r}$ $(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

• $P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (2-\lambda) \cdot (-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \stackrel{!}{=} 0$
 $\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$ doppelter EW $\text{av}(A, \lambda=1) = 2$

• $(A - 1E)\vec{v} = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\text{gv}(A, \lambda=1) = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{r}_1(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$ zu wenig

neuer Ansatz $\vec{r}_2(t) = t \cdot e^{2t} \cdot \vec{a} + e^{2t} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \text{ const}$
 $\Rightarrow \ddot{\vec{r}}_2(t) = e^{2t} \vec{a} + 2te^{2t} \vec{a} + 2e^{2t} \vec{b}$
 $= e^{2t} (\vec{a} + 2\vec{b} + 2t \cdot \vec{a})$

Einsetzen in $\ddot{\vec{r}}_2 = A \vec{r}_2$

$e^{2t} (\vec{a} + 2\vec{b} + 2t \vec{a}) = A t e^{2t} \vec{a} + A e^{2t} \vec{b}$

$\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{a}t = A \vec{a}t + A \vec{b}$

$\Rightarrow A \vec{a} = 2\vec{a}$ d.h. \vec{a} ist EV zum EV 2
 $A \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{b} \Leftrightarrow (A - 2E) \vec{b} = \vec{a}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ siehe oben $\lambda = 1$

$(A - 2E) \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$
 ein w reicht

in Ansatz einsetzen

$\vec{r}_2(t) = t \cdot e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(t+1) \\ e^t \cdot t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{r}_h = c_1 \vec{r}_1(t) + c_2 \vec{r}_2(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}}$

Bestimmung einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems

1. Methode: Variation der Konstanten

$W(t) = \begin{pmatrix} \vec{r}_1(t) & \dots & \vec{r}_n(t) \end{pmatrix}$ Wronski-Matrix bestehend aus Basislösungen des homogenen Systems

Ansatz: $\vec{r}_s = c_1(t) \vec{r}_1(t) + \dots + c_n(t) \cdot \vec{r}_n(t) = W(t) \cdot \vec{c}(t)$

Einsetzen in DGL-System

$$\dot{\vec{r}}_s(t) = \underbrace{\dot{W}(t)}_{=0} \vec{c}(t) + W(t) \cdot \dot{\vec{c}}(t) = \underbrace{A \cdot W(t)}_{=0} \vec{c}(t) + \vec{b}(t)$$

$$\Rightarrow W(t) \cdot \dot{\vec{c}}(t) = \vec{b}(t)$$

Bsp: $\dot{\vec{r}} = \underbrace{\frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A(t)} \vec{r} + t^3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

homogenes System: $\dot{\vec{r}} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{r}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{r}}_2 = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow W(t) = \begin{pmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_h = \begin{pmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ansatz $\vec{r}_s = W(t) \cdot \vec{c}(t)$

$$W(t) \cdot \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \vec{b}(t)$$

$$\begin{pmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{c}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3t^2 & t^2 \\ 0 & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{vmatrix}} = \frac{3t^4}{t^2} = 3t^2 \Rightarrow c_1 = t^3$$

$$\dot{c}_2 = \frac{\begin{vmatrix} t & 3t^3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{vmatrix}} = \frac{0}{t^2} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r}_s = \begin{pmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{r}_{inh} = \vec{r}_s + \vec{r}_h = \begin{pmatrix} t^4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}}}$$

$$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_2 = 1 \quad c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{r}_{AWP}(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 + t^3 \\ t \end{pmatrix}}}$$

2. Methode: spezielle Ansätze nach Typ der Inhomogenität

$$\text{Bsp: } \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3t-2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ansatz für } \vec{r}_s: \quad \begin{aligned} x &= At+B \\ y &= Ct+D \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A \\ \dot{y} &= C \end{aligned}$$

Einsetzen

$$\dot{x} = A = 2(At+B) + Ct+D + 1$$

$$\dot{y} = C = (At+B) + 2(Ct+D) + 3t-2$$

$$\text{Koeff.-vgl:} \quad \begin{aligned} 0 &= 2A+C & \xrightarrow{1} C &= -2A \\ A &= 2B+D+1 & \xrightarrow{2} D &= -2B \\ 0 &= A+2C+3 & \xrightarrow{3} A &= 1 \quad C = -2 \\ C &= B+2D-2 & \xrightarrow{4} D &= B=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}$$

4.5 Autonome DGL - Systeme

Definition

Def: Ein DGL-System $\dot{\vec{r}} = \vec{v}(t, \vec{r})$ heißt autonom, wenn die Funktion \vec{v} unabhängig von t ist, d.h.
$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}(\vec{r}) \quad \vec{v}: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

{Phasenkurve, Trajektorie, Orbit, Phasenportrait}

Ist $\vec{v}: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig auf D , dann besitzt das AWP
$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}(\vec{r}), \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

für jedes (t_0, \vec{r}_0) genau eine Lösung. Die Spur der Lösungskurve ist dabei unabhängig von t_0 .

Die Spur einer Lösungskurve wird auch als Phasenkurve, Trajektorie oder Orbit bezeichnet.

Die Gesamtheit aller Phasenkurven eines autonomen DGL-Systems im \mathbb{R}^n bezeichnet man als Phasenportrait.

Bemerkung

Ist \vec{v} stetig auf D , so können sich nach obigem Satz Phasenkurven nicht schneiden.

Def: Ein Punkt $\vec{a} \in D$ des Phasenraumes heißt Ruhelage / Gleichgewichtslage / Fixpunkt des DGL-Systems, falls $\vec{v}(\vec{a}) = \vec{0}$. Er korrespondiert zur konstanten Lösung $\vec{r}(t) \equiv \vec{a}$ des DGL-Systems.

Beispiel 1

Beispiel

Räuber - Beute - Modell

$$\dot{x} = -(\alpha - \beta y) \cdot x$$

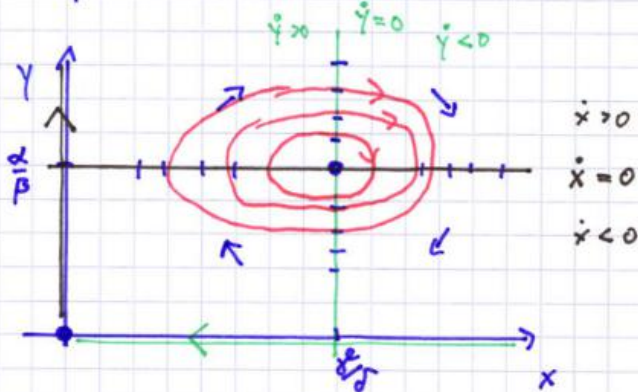
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$

$$\dot{y} = (\gamma - \delta x) \cdot y$$

$$x, y \in [0, \infty)$$

$x(t)$ Räuber zum ZP t

$y(t)$ Beute zum ZP t



$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad \text{oder} \quad x = \frac{\gamma}{\delta}$$

2 Fixpunkte $(0, 0)$, $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$

$x = 0 \Rightarrow x \equiv 0$ y wächst exponentiell

$y = 0 \Rightarrow y \equiv 0$ x schrumpft exponentiell

Für den Fall $n = 2$ Phasen - DGL für die Phasenkurven

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

Am Beispiel: $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(\gamma - \delta x)y}{-(\alpha - \beta y)x}$

Trennung der Variablen

$$y \neq 0, y \neq \alpha/\beta$$

$$\int \frac{\alpha - \beta y}{y} dy = \int \frac{\gamma - \delta x}{x} dx$$

$$\int \frac{\alpha}{y} - \beta dy = \int \gamma - \frac{\delta}{x} dx$$

$$\alpha \ln y - \beta y = \gamma x - \delta \ln x + C$$

implizite Lsg
der DGL

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x+y-1) \\ x(1-x-y) \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ oder } x+y=1$$

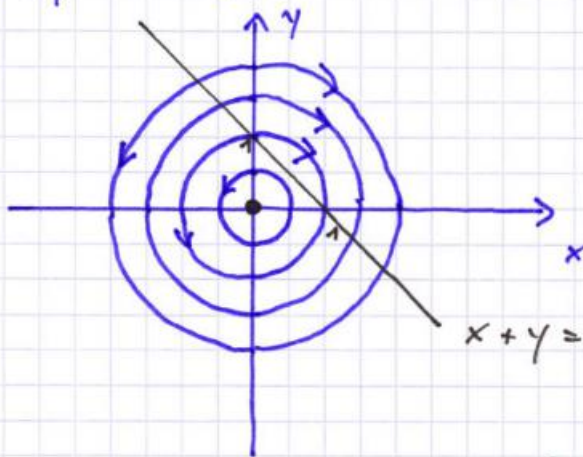
$$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x+y=1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{x(1-x-y)}{y(x+y-1)} = -\frac{x}{y} \quad x+y \neq 1$$

$$\int y dy = -\int x dx$$

$$\frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} x^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C \rightarrow \text{Kreise}$$



$x+y=1$ Gerade aus Fixpunkten

+ Fixpunkt $(0,0)$

Stabilität von Fixpunkten

Es sei $\vec{f} = \vec{v}(\vec{r})$ ein autonomes DGL-System und \vec{a} ein Fixpunkt des Systems, d.h. $\vec{v}(\vec{a}) = \vec{0}$. Man nennt den Fixpunkt

- stabil, falls es $\varepsilon, \delta > 0$ gibt so dass für alle Lösungskurven \vec{r} des Systems gilt

$$\vec{r}(t_0) \in U_\delta(\vec{a}) \Rightarrow \vec{r}(t) \in U_\varepsilon(\vec{a}) \text{ für alle } t \geq t_0$$

Ansonsten heißt \vec{a} instabil.

- asymptotisch stabil, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle Lösungskurven \vec{r} gilt: $\vec{r}(t_0) \in U_\varepsilon(\vec{a}) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{r}(t) = \vec{a}$

allgemeines autonomes System

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$$

Hat $A\vec{x} + \vec{b} = \vec{0}$ keine Lösung, so gibt es keine Fixpunkte.
Ist $\vec{x} = \vec{a}$ eine Lösung von $A\vec{x} + \vec{b} = \vec{0}$ so hat das System den Fixpunkt \vec{a} (konstante Lösung $\vec{x} \equiv \vec{a}$)

Substituiere $\vec{x} = \vec{s} + \vec{a}$ $\vec{s} = \vec{s}(t)$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{s}}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{s}} = A(\vec{s} + \vec{a}) + \vec{b}$$

$$\dot{\vec{s}} = A\vec{s} + A\vec{a} + \vec{b}$$

$$\dot{\vec{s}} = A\vec{s}$$

\Rightarrow Hinsichtlich der Stabilität verhält sich der Fixpunkt \vec{a} des inhomogenen Systems wie der Fixpunkt $\vec{0}$ des zugehörigen homogenen Systems.

\Rightarrow Es genügt, homogene autonome Systeme $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ zu betrachten.

Satz

Ist $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ ein autonomes homogenes LDBL-System

und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A , dann gilt

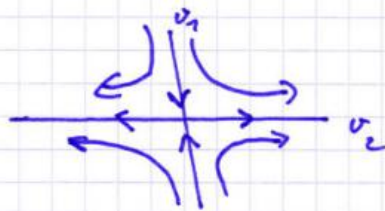
i) $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$ für alle $k \Rightarrow$ Fixpunkt $\vec{0}$ ist asymptotisch stabil

ii) $\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$ für ein $k \Rightarrow$ Fixpunkt $\vec{0}$ instabil

iii) $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0 \text{ für alle } k \\ \text{ist } \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0 \\ \text{so ist } \operatorname{av}(A, \lambda_k) = \operatorname{gv}(A, \lambda_k) \end{array} \right\} \Rightarrow$ Fixpunkt $\vec{0}$ stabil

Typen von Fixpunkten von $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ für $n = 2$

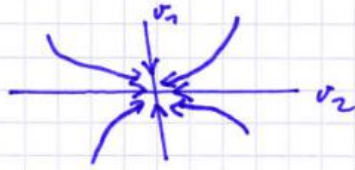
2 verschiedene reelle EW λ_1, λ_2 mit EV λ_1, λ_2



$$\lambda_1 < 0$$

$$\lambda_2 > 0$$

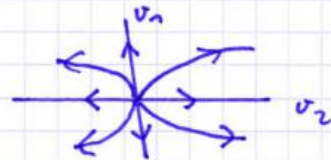
Sattelpunkt



$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

asymptotisch
stabil

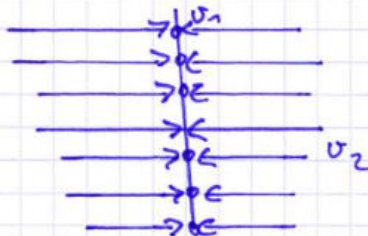
Knoten
2. Art



$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$$

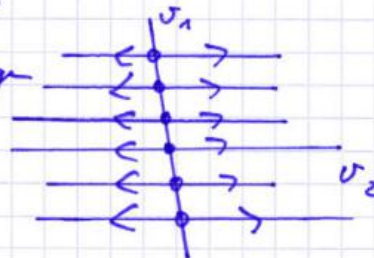
instabil

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 \neq 0$$



$\lambda_2 < 0$ stabil

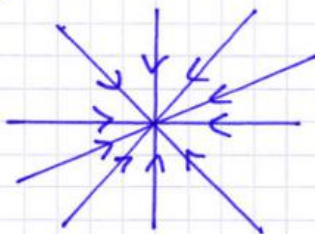
Gerade
von
Ruhelage



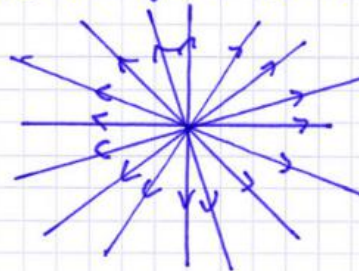
$\lambda_2 > 0$ instabil

doppelter reeller EWR mit geometrischer Vfh 2

• doppelter reeller EV λ mit geom. Vfh 2

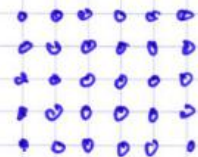


$\lambda < 0$
asymptotisch
stabil



$\lambda > 0$
instabil

Knoten 1. Art



$\lambda = 0$
($\Rightarrow A = 0$)

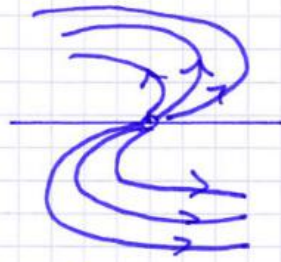
Ebene
von Ruhelage

doppelter reeller EW λ mit geom. vfh 1

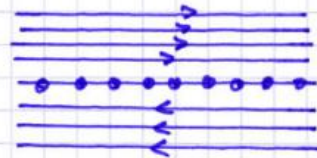
- doppelter reeller EW λ mit geom. Vfh 1



$\lambda < 0$
asymptotisch
stabil



$\lambda > 0$
instabil



$\lambda = 0$

Gerade von Ruhelagen
instabil

Knoten 3. Art

komplexer EW $\lambda = \alpha + i\beta$ $\beta \neq 0$

- komplexer EW $\lambda = \alpha + i\beta$

$\beta \neq 0$



$\alpha = 0$
Zentrum
stabil



$\alpha < 0$
asymptotisch
stabil



$\alpha > 0$
instabil

Straudel punkt

ENDE