Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Dr. J. Schreyer

Sommersemester 2023

Mathematik für Informatiker II
Hausaufgabenserie 1

Aufgabe 1

Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,5)}$$

Bestimmen Sie den Rang der Matrix und geben Sie eine Basis für den Zeilenraum und eine Basis für den Spaltenraum von A an.

Aufgabe 2

Gegeben seien die folgenden beiden Vektormengen des $\mathbb{R}^3$.

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Gamma_2 = \{\vec{r} \mid A\vec{r} = \vec{b}\} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

(a) Bestimmen Sie $rg(A)$ und $rg(A, \vec{b})$. Begründen Sie, dass $\Gamma_2 \neq \emptyset$.

(b) Bestimmen Sie $dim(\Gamma_2)$

(c) Gilt $\Gamma_1 = \Gamma_2$?

Aufgabe 3

Geben Sie zwei windschiefe Ebenen im $\mathbb{R}^4$ an, d.h. zwei affine Unterräume des $\mathbb{R}^4$ welche weder parallel sind noch sich schneiden. (Mit Nachweis beider Eigenschaften)

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Dr. J. Schreyer Sommersemester 2023

Mathematik für Informatiker II
Hausaufgabenserie 2

Aufgabe 1

Im Raum $\mathbb{R}^4$ sei die Ebene $\Gamma = \vec{r}_0 + [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ sowie der Punkt $\vec{r}_1$ gegeben mit

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man gebe den Abstand $d(\vec{r}_1, \Gamma)$ von $\vec{r}_1$ und Γ an und bestimme den Fußpunkt $\vec{r}_F$ des Lotes von $\vec{r}_1$ auf Γ.

Aufgabe 2

Gegeben sei der Vektorraum $C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ der auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ stetigen Funktionen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Weisen Sie die Skalarprodukteigenschaften (S1) bis (S4) nach. (Rechenregeln für Integrale anwenden)

Aufgabe 3

Gegeben sei die Menge $M = \{0, 1, 2\}^n$ der n-dimensionalen Zeilenvektoren (Worte) mit Einträgen 0, 1 oder 2. Auf M wird ein Abstandsmaß $d : M^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(\underline{a}, \underline{b}) = \text{Anzahl der Stellen, an denen sich } \underline{a} \text{ und } \underline{b} \text{ unterscheiden}$$

Bsp: $d((1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 3)) = 2$. Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist, d.h. dass die Eigenschaften (D1) bis (D3) erfüllt sind.
(Bemerkung: Man nennt $d(\underline{a}, \underline{b})$ den Hammingabstand der Worte $\underline{a}$ und $\underline{b}$.)

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Dr. J. Schreyer

Sommersemester 2023

Mathematik für Informatiker II
Hausaufgabenserie 3

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden beiden Normen im $\mathbb{R}^2$.

$$\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\|_1 = |x_1| + |x_2| \text{ (Betragssummennorm/Manhattan-Norm/1-Norm)}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \text{ (Maximumnorm/ Unendlich-Norm)}$$

Die zugehörigen Metriken erhält man durch $d(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}||$

Der Einheitskreis ist die Menge $K = \{\vec{x} \mid d(\vec{x}, \vec{0}) = 1\}$ aller Punkte, die den Abstand 1 vom Koordinatenursprung haben. Zeichnen Sie in der Ebene die Einheitskreise bezüglich der euklidischen Metrik, der Manhattanmetrik und der Maximummetrik ein.

Aufgabe 2

Gegeben seien die fünf Punktpaare

$$\begin{array}{rcl} (x_1, y_1) & = & (-2, 3) \\ (x_3, y_3) & = & (0, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (x_2, y_2) & = & (-1, 1) \\ (x_4, y_4) & = & (1, 3) \end{array} \qquad (x_5, y_5) \;=\; (2, 6)$$

Gesucht ist ein Ausgleichspolynom höchstens zweiten Grades, d.h.

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2,$$

für welches die quadratische Abweichung

$$D = (y_1 - p(x_1))^2 + \ldots + (y_5 - p(x_5))^2$$

den kleinsten Wert annimmt.

Aufgabe 3

Gegeben Sei die Diagonalmatrix $D = diag(2, 4, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass durch $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x}^T D \vec{y}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert wird. (D.h., weisen Sie die Skalarprodukteigenschaften nach.)

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Dr. J. Schreyer

Sommersemester 2023

Mathematik für Informatiker II
Hausaufgabenserie 4

Aufgabe 1

Für die folgenden quadratischen Matrizen A berechne man $\det(A)$. (z.B. mit Hilfe des Entwicklungssatzes)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Welche dieser Matrizen sind invertierbar?

Gegeben sei eine schiefe Dreieckspyramide mit den Eckpunkten $A(1;1;1)$, $B(1;2;3)$, $C(4;-2;1)$ und $D(5;5;5)$. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Aufgabe 2

Gegeben sei das folgende parameterabhängige lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} tx & + & y & + & z & = & \sqrt{t} \\ \sqrt{t}x & + & ty & - & tz & = & -t^3 \\ x & - & \sqrt{t}y & - & t^2 z & = & t \end{array} \qquad (*)$$

(a) Man bestimme $det(A)$ für die Koeffizientenmatrix $A = A(t)$

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist obiges LGS eindeutig lösbar?

(c) Mit Hilfe der Cramerschen Regel bestimme man für $t > 0$ die Lösung $\vec{x} = \vec{x}(t)$.

Aufgabe 3

(a) Es seien V, W und X drei K-Vektorräume. Weiterhin seien $L_1 : V \to W$ und $L_2 : W \to X$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass auch die Komposition $L = L_2 \circ L_1 : V \to X$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Gegeben sei die Abbildung $L : C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $L(f) = f'' - 3f' + f$. Begründen Sie, dass L linear ist.

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Dr. J. Schreyer

Sommersemester 2023

Mathematik für Informatiker II
Hausaufgabenserie 5

Aufgabe 1

Für die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ entscheide man, ob es sich um lineare Abbildungen handelt. Falls ja, gebe man eine Matrix M an, so dass

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ansonsten begründe man, warum die Linearitätseigenschaft verletzt ist (Gegenbeispiel).

(a) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x - 2y \\ 2x \end{pmatrix}$

(b) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

(c) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ 3x \end{pmatrix}$

(d) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ y + x \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Es sei $V = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der auf $\mathbb{R}$ stetigen reellwertigen Funktionen. Die Abbildung $L : V \to V$ sei defieniert durch:
$L(f) = g$ mit $(L(f))(x) = g(x) = f(x-2)$, d.h. die Abbildung bewirkt eine Verschiebung des Funktionsgraphen um 2 nach rechts. Zeigen Sie, dass L eine lineare Abbildung ist.
Zur Erinnerung: Für die Summe von Funktionen und die Multiplikation von Funktionen mit Skalaren gilt: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

Aufgabe 3

Es sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung, welche die Spiegelung an der Ursprungsebene $\Gamma = [\vec{a}, \vec{b}]$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $L(\vec{0})$, $L(\vec{a})$, $L(\vec{b})$ und $L(\vec{a} \times \vec{b})$.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix M mit $L(\vec{x}) = M\vec{x}$.

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Dr. J. Schreyer

Sommersemester 2023

Mathematik für Informatiker II
Hausaufgabenserie 6

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei die Abbildung, welche eine Drehung um die Drehachse
$\Gamma = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ beschreibt.
Bestimmen Sie eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit $L(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie dass gilt:

(a) Die Menge $O^+(n) = \{A \in \mathbb{R}^{(n,n)} \mid A \text{ ist Drehmatrix}\}$ ist eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation.

(b) Die Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen (die nicht gleichzeitig Drehungen sind) ist eine Drehung.

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Dr. J. Schreyer Sommersemester 2023

Mathematik für Informatiker II
Hausaufgabenserie 7

Aufgabe 1

Es se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung mit $L(\vec{x}) = M\vec{x}$ mit

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Man deute die Abbildung geometrisch (Drehung/Spiegelung/Drehspiegelung...) und gebe Drehachse bzw. Spiegelebene an.

Aufgabe 2

Gegeben Sei die Gleichung

$$2x^2 - 6xy + 2y^2 = 10$$

Stellen Sie die Gleichung in Matrix-Vektor-Schreibweise dar und bestimmen Sie eine orthogonale Transformationsmatrix T, so dass die transformierte Gleichung (nach Koordinatentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$) auf eine der Normmalformen $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ bzw. $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$ gebracht werden kann. Stellen Sie die Lösungsmenge der Gleichung im $x - y$-Koordinatensystem dar.

Aufgabe 3

Gleiche Aufgabe wie bei Aufgabe 2 für die Gleichung

$$97x^2 + 192xy + 153y^2 = 225.$$

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Dr. J. Schreyer

Sommersemester 2023

Mathematik für Informatiker II
Hausaufgabenserie 8

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion f aus $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 \cdot e^{1-y^2}$$

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen und geben Sie den Gradienten von f an.

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f durch den Punkt $(1,1,f(1,1))$.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung im Punkt $\underline{a} = (1,1)$ in Richtung $\underline{v} = (3,4)$.

Aufgabe 2

Für die folgendnen Teilmengen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bestimme man den Rand und entscheide, ob sie offen, abgeschlossen, offen und abgeschlossen, bzw. weder offen noch abgeschlossen sind. Geben Sie eine Skizze der jeweiligen Menge an.

(a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

(c) D ist der maximale Definitionsbereich der Funktion f mit $f(x,y) = \ln(xy)$

Aufgabe 3

Gegeben seien die Funktionen:
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x \cdot e^y$
$g_1, g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $x = g_1(u,v,w) = u^2 - w, y = g_2(u,v,w) = u + v + w$ Die Funktion $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$H(u,v,w) = f(g_1(u,v,w), g_2(u,v,w))$$

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $H_u(u,v,w)$, $H_v(u,v,w)$ und $H_w(u,v,w)$ direkt und unter Verwendung der Kettenregel.

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Dr. J. Schreyer

Sommersemester 2023

Mathematik für Informatiker II
Hausaufgabenserie 9

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^{4x^2+y^2}$

(a) Skizzieren Sie die Niveaumengen $N_c(f)$ für $c = 1$, $c = e$, $c = e^4$ und $c = e^{16}$ und $c = e^{36}$

(b) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Tangente an die Höhenline $N_{e^5}(f)$im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$

Aufgabe 2

Für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (1-x)e^{xy}$ bestimme man den Gradienten und die Hessematrix. Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom der Funktion mit der Entwicklungsstelle $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Funktion $F : d \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F(x,y) = x \ln y + y \cos(x) + x$. Für die Punkte der Höhenlinie $N_1(F)$ gilt die Gleichung

$$F(x,y) = x \ln y + y \cos(x) + x = 1$$

Offenbar ist der Punkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ein Punkt der Höhenlinie.

(a) Zeigen Sie, dass durch die Gleichung $F(x,y) = 1$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) implizit eine Funktion g definiert wird mit $F(x,y) = 1 \;\Leftrightarrow y = g(x)$

(b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangenten t an die Höhenlinie $N_1(F)$ im Punkt $(0, 1)$.

Technische Universität Ilmenau Sommersemester 2023
Institut für Mathematik
Dr. J. Schreyer

Mathematik für Informatiker II
Hausaufgabenserie 10

Aufgabe 1 (Lineares Optimierungsproblem)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

und die Menge

$$D = \{(x, y)|x \geq 1, y \geq -1, x + y \leq 2\}.$$

Bestimmen Sie die globalen Extremwertstellen und die globalen Extremwerte von f auf D, also $\max\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$ und $\min\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle lokalen Extrempunkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = xy(2x + y - 6).$$

Hinweis: Es gibt 4 extremwertverdächtige Punkte.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit der Multiplikatorenregel von Lagrange das Maximum und das Minimum der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x + y$$

unter der Nebenbedingung $2x^2 - 2xy + y^2 = 5$

Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Dr. J. Schreyer

Sommersemester 2023

Mathematik für Informatiker II
Hausaufgabenserie 11

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems für $y = y(t)$:

$$y' = \cos(t) \cdot (y-1)^2, \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + t^2 y = 2t^2 e^{t^3}, \qquad y(1) = \cosh(1)$$

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y'' - 6y' + 5y = 4e^{-t}$

(b) $y'' + 4y = \cos(2t)$